CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 14	
Fonction logarithme népérien et intégration	***Pour le 3 mai 2010***

Polynésie, septembre 2009

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty\end{array}\right\}$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = -\infty}$ (par produit de limites).

2) On remarque que $f_0 = uv$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = \ln x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors f_0 est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Alors $f_0' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où $f_0'(x) = -\ln x + (-x)\times\dfrac{1}{x} = -\ln x - 1$, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$.

$$-\ln x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \mathrm{e}^{-1}$$
$$-\ln x - 1 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\ln x < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x > -1 \quad\Leftrightarrow\quad x > \mathrm{e}^{-1}$$
$$-\ln x - 1 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\ln x > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x < -1 \quad\Leftrightarrow\quad x < \mathrm{e}^{-1}$$

Donc, **la fonction f_0 est croissante sur $]0\ ;\mathrm{e}^{-1}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\ ;+\infty[$**.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1) On remarque que $f_n = w + f_0$ avec $w(x) = -nx$.

Les fonctions w et f_0 sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors f_n est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Alors $f_n' = w' + f_0'$ avec $w'(x) = -n$ et $f_0'(x) = -\ln x - 1$.

D'où $\boldsymbol{f_n'(x) = -\ln(x) - n - 1}$, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$.

2) a) La courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses lorsque f_n' s'annule.

Or $f_n'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -n - 1 - \ln x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = -n - 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \mathrm{e}^{-n-1}$.

Par conséquent, **la courbe $\mathscr{C}_n$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses**.

b) Cherchons l'image de e^{-n-1} par f_n pour tout entier naturel n :

$$f_n\left(\mathrm{e}^{-n-1}\right) = -n\mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-n-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-n-1}\right) = -n\mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-n-1}(-n-1) = -n\mathrm{e}^{-n-1} + n\mathrm{e}^{-n-1} + \mathrm{e}^{-n-1} = \mathrm{e}^{-n-1}$$

On en déduit que **le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$**.

c) Voir figure ci-dessous.

3) a) Les abscisses des éventuels points d'intersections de $\mathscr{C}_n$ et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.

Or $f_n(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -nx - x\ln x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(-n - \ln x) = 0$. Comme $x \in]0\ ;\ +\infty[$, alors

$f_n(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -n-\ln x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x=-n \quad \Leftrightarrow \quad x=\mathrm{e}^{-n}$.

Donc **la courbe $\mathscr{C}_n$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}**.

b) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point B_n est égal à $f_n'\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$.

Or $f_n'\left(\mathrm{e}^{-n}\right)=-n-1-\ln\left(\mathrm{e}^{-n}\right)=-n-1-(-n)=-1$.

Donc **la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n (il est égal à 1)**.

c) Voir figure ci-dessous.

Partie C : Calculs d'aires.

1) Voir figure ci-dessous.

2) Posons $\begin{cases} u'(x)=x \\ v(x)=\ln(x) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Les fonctions *u'v* , *uv'* et $(uv)'$ sont dérivables sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;1\right]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\left(\frac{1}{2}x\right)dx.$$

Alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}=\left[\frac{1}{2}\ln(1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right]$.

D'où : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right]=0-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\times(-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\mathrm{e}^2}$.

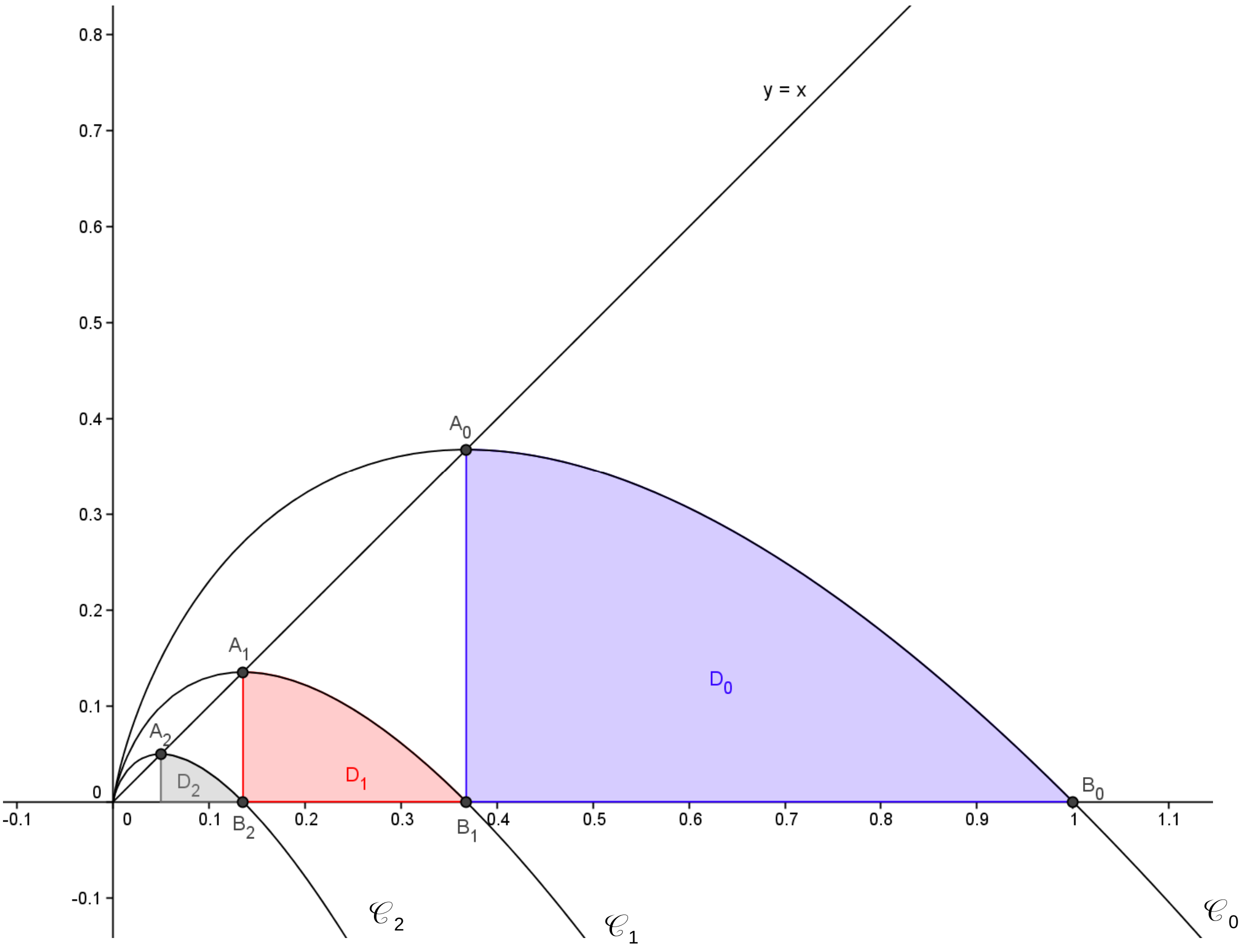
Par conséquent, $\displaystyle\boldsymbol{\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln(x)\,dx=\frac{3}{4\mathrm{e}^2}-\frac{1}{4}}$.

b) Comme f_0 est continue et positive sur $\left[\mathrm{e}^{-1}\ ;1\right]$, alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{I}_0}=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f_0(x)\,dx=-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{4}-\frac{3}{4\mathrm{e}^2}}.$$

c) On admet que le domaine $\mathscr{D}_{n+1}$ est l'image du domaine $\mathscr{D}_n$ par l'homothétie de centre *O* et de rapport $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On peut donc dire que l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_{n-1}$ multipliée par $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\mathcal{I}_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathcal{I}_0}$ et $\boldsymbol{\mathcal{I}_2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathcal{I}_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathcal{I}_0=\boldsymbol{\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}\mathcal{I}_0}$.



y = x
A0
A1
A2
B0
B1
B2
D0
D1
D2
𝒞 0
𝒞 1
𝒞 2
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1

C. Lainé