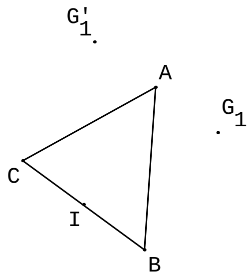
CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1

Barycentres, lieux géométriques et fonctions	***Pour le 2 octobre 2009***

1) a) et b)



c) **Il semble que l'ensemble des points des points G_t lorsque t décrit l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ est le segment $[G_{-1}G_1]$.**

2) a) Comme $t^2+1+t-t=t^2+1$ et que $t^2+1\neq 0$ pour tout réel t de $[-1\ ;\ 1]$, alors **le point G_t existe pour tout réel t de $[-1\ ;\ 1]$.**

b) Comme G_t est le barycentre du système $\{(A,t^2+1)\ ;\ (B,t)\ ;\ (C,-t)\}$, alors on a :

$$(t^2+1)\ \overrightarrow{MA}+t\ \overrightarrow{MB}-t\ \overrightarrow{MC}=(t^2+1+t-t)\ \overrightarrow{MG_t}\ .$$

En prenant $M=A$, on obtient : $t\ \overrightarrow{AB}-t\ \overrightarrow{AC}=(t^2+1)\ \overrightarrow{AG_t}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AG_t}=\dfrac{-t}{t^2+1}\ \overrightarrow{BC}$ **, pour tout réel t de $[-1\ ;\ 1]$.**

b) • Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition **R** en tant que fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $[-1\ ;\ 1]$. On a : $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=-x$ et $v(x)=x^2+1$.

Alors $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=-1$ et $v'(x)=2x$.

Pour tout réel x de $[-1\ ;\ 1]$, $f'(x)=\dfrac{-1\times(x^2+1)-(-x)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Comme $(x^2+1)^2$ est strictement positif sur $[-1\ ;\ 1]$, alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de x^2-1. Or x^2-1 est du signe positif à l'extérieur des racines -1 et 1, et négatif à l'intérieur de ces racines.

On en déduit que :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

C. Lainé

• D'après le tableau de variation de la fonction f, on en déduit que lorsque x décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$, $f(x)$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

Par conséquent, lorsque t décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$, $\frac{-t}{t^2+1}$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$; c'est-à-dire G_t décrit le segment $[G_{-1}G_1]$.

Par conséquent, **l'ensemble des points des points G_t lorsque t décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$ est le segment $[G_{-1}G_1]$.**

3) a) D'après la propriété fondamentale, pour tout point M de l'espace :

$$2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MG_1} \quad \text{et} \quad 2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MG_{-1}}$$

Donc, $\left\|2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ équivaut à $\left\|2\,\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|2\,\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$, c'est-à-dire à $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$, ou encore $MG_1=MG_{-1}$.

Par conséquent, **(*E*) est le plan médiateur du segment $[G_{-1}G_1]$.**

3) b) D'après la question 3) a), $2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MG_1}$ pour tout point M de l'espace.

De plus, $2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}\right)=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\,\overrightarrow{IA}$.

Donc $\left\|2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ équivaut à $\left\|2\,\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|2\,\overrightarrow{IA}\right\|$, c'est-à-dire $MG_1=IA$.

Par conséquent, **(*F*) est la sphère de centre G_1 et de rayon IA.**