DEVOIR MAISON N° 2

Suites et démonstration par récurrence	***Pour le 9 octobre 2009***

On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par : $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul, $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c) Trouver le plus petit entier naturel N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.

d) En déduire que si $n \geq N$ alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

2) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est convergente.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq \left[1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$.

3) On admettra qu'une suite croissante et majorée est convergente.
Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

C. Lainé