

## CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

**Suites**

**Pour le 9 octobre 2009**

$$1) \text{ a) } v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \text{ pour tout}$$

entier naturel  $n$  non nul.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ (par somme de limites).}$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1; \text{ par suite, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

$$\text{Par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}.$$

b) Comme  $n$  est un entier naturel non nul, alors  $\frac{1}{n} > 0$ , et par suite,  $1 + \frac{1}{n} > 1$ .

Comme la fonction  $x \mapsto x^2$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ , on en déduit que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > 1, \text{ puis que } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel non nul,  $v_n > \frac{1}{2}$ .**

$$\begin{aligned} \text{c) } v_n < \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{car la fonction racine carrée est strictement croissante sur } [0; +\infty[ \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \quad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } ]0; +\infty[ \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \approx 4,4$ ; alors **le plus petit entier naturel  $N$  tel que, si  $n \geq N$ ,  $v_n < \frac{3}{4}$ , est  $N = 5$ .**

d) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 5.

$$\text{D'après la question précédente, } v_n < \frac{3}{4}, \text{ c'est-à-dire } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}.$$

Comme  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n$  non nul, alors  $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$ .

Par conséquent, si  $n \geq 5$  alors  $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$ .

2) a) Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « pour tout entier naturel  $n \geq 5$  :  $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$  »

→ Initialisation : pour  $n = 5$ ,  $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 = u_5$  et  $u_5 \leq u_5$  alors on a  $\mathcal{P}(5)$  qui est vraie.

→ Hérédité : Soit  $n \geq 5$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors :  $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ .

D'après la question 1) d),  $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$ . D'où  $u_{n+1} < \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$ .

Par suite,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$\mathcal{P}(5)$  est vraie et pour tout  $n$  supérieur ou égal à 5,  $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ .

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout  $n$  supérieur ou égal à 5,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie

C'est-à-dire : **pour tout  $n$  supérieur ou égal à 5,  $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ .**

b) Pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$ .

Or d'après la question précédente,  $u_5 \leq u_5$ ,  $u_6 \leq \frac{3}{4} u_5$ ,  $u_7 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_5$ , ...,  $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ .

En ajoutant membre à membre les termes de ces inégalités, on obtient :

$$S_n \leq u_5 + \left(\frac{3}{4}\right) u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_5 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$ .**

c)  $1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$  est la somme des  $(n-4)$  termes consécutifs d'une suite

géométrique de raison  $\frac{3}{4}$ . Alors :  $1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$ .

Comme  $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 5$ , on en déduit que  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} < 1$ .

Par suite,  $1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} < 4$

Par conséquent, **pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $S_n \leq 4u_5$ .**

3) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 5.  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ .

Or  $u_{n+1} > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 5$ . Par conséquent, **la suite  $(S_n)_{n \geq 5}$  est croissante.**

De plus, d'après la question 2) c), la suite  $(S_n)_{n \geq 5}$  est majorée par  $4u_5$ .

Par conséquent, **la suite  $(S_n)_{n \geq 5}$  est convergente.**