CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

Fonction exponentielle	***Pour le 23 octobre 2009***

1) Soit f et g les fonctions définie sur **R** respectivement par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

➢ La fonction f est dérivable sur **R** en tant que produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$, dérivables sur **R**.
La fonction g est dérivable sur **R** en tant que quotient des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ (e^x ne s'annulant pas pour tout réel x), dérivables sur **R**.

Soit un réel x. $f'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x(1+x)$ et $g'(x) = \dfrac{1 \times e^x - xe^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$.

Comme e^x est strictement positif pour tout réel x, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $(1+x)$ et le signe de $g'(x)$ est celui de $(1-x)$.

➢ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (théorème du cours) ; $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

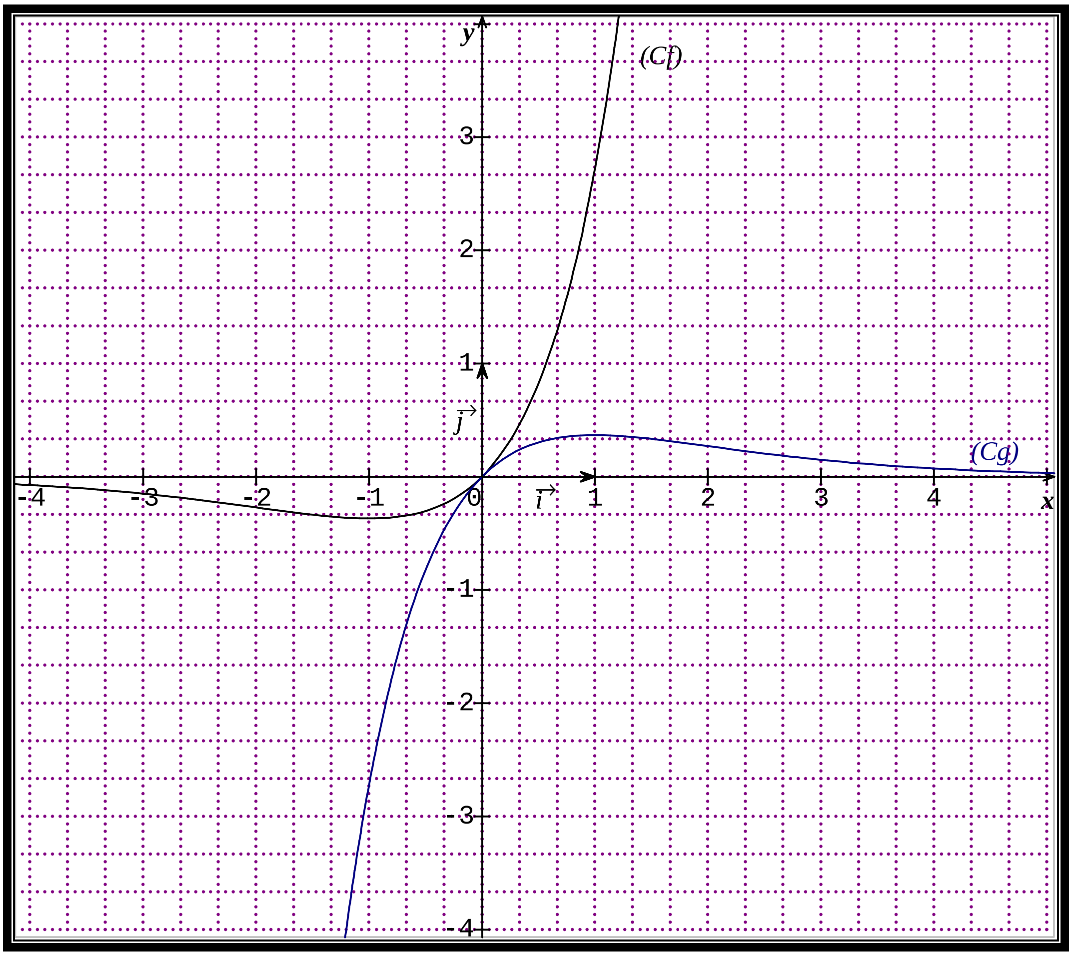
➢ On en déduit que :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

➢

C. Lainé



2) **On peut conjecturer que la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) sur R.**

3) Étudions le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$ sur **R**.

Or $h(x)=xe^x-\dfrac{x}{e^x}=x\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)=x\left(\dfrac{\left(e^x\right)^2-1}{e^x}\right)=\dfrac{x}{e^x}\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)$.

De plus, $e^x-1>0 \iff e^x>1 \iff x>0$ et $e^x-1<0 \iff e^x<1 \iff x<0$.
Alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^x+1}{e^x}$		$+$		$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$+$	

Par conséquent, **la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) sur R ; elles se coupent en O.**