CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4	
Fonction exponentielle	***Pour le 2 novembre 2009***

Métropole, septembre 2009

Partie A

1) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a est de la forme : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Or la fonction f est dérivable sur **R** et, pour tout réel x, $f'(x)=e^x$.

Donc l'équation précédente est de la forme : $y = \mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a$.

Par suite, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses lorsque $\mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a = 0$.

Or $\mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a = 0$ équivaut à $\mathrm{e}^a(x-a+1)=0$. Comme $\mathrm{e}^a \neq 0$, alors $\mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a = 0$ équivaut à $x = a-1$.

Par conséquent, **la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $a-1$**.

2) Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

On en déduit que N a pour coordonnées $(a\ ;\ 0)$, et par suite, le vecteur $\overrightarrow{NP}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}(a-1)-a\\ 0-0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$. Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{NP} = -\vec{i}}$.

Partie B

1) Une équation de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_g$ est de la forme : $y = g'(a)(x-a)+g(a)$.

Par suite, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses lorsque $g'(a)(x-a)+g(a)=0$.

Or $g'(a)(x-a)+g(a)=0$ équivaut à $x-a = \dfrac{-g(a)}{g'(a)}$, car $g'(x)\neq 0$ pour tout nombre réel x.

Par conséquent, **la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $\boldsymbol{a-\dfrac{g(a)}{g'(a)}}$**.

2) Les points N et P ont pour coordonnées respectives $(a\ ;\ 0)$ et $\left(a-\dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{NP}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$.

Or on cherche une fonction vérifiant les conditions $g(0)=2$ et $\overrightarrow{NP}=\vec{i}$, c'est-à-dire les conditions $g(0)=2$ et $-\dfrac{g(a)}{g'(a)}=1$.

On peut également écrire l'égalité $-\dfrac{g(a)}{g'(a)}=1$ de la façon suivante : $g'(a)=-g(a)$.

Par suite, les fonctions g cherchées sont les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) $y'=-y$ telle que $g(0)=2$.

Or les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions g définies sur **R** par $g(x)=k\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $g(0)=2$, alors $2=k\mathrm{e}^{0}$, c'est-à-dire $k=2$.

Par conséquent, **il existe une unique fonction g vérifiant $g(0)=2$ et $\overrightarrow{NP}=\vec{i}$: c'est la fonction définie sur R par $g(x)=2\mathrm{e}^{-x}$**.