CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5	
Équation différentielle et fonction exponentielle	*Pour le 9 novembre 2009*

Antilles, juin 2008

Partie A

1) $y'+2y=0$ équivaut à $y'=-2y$.
Donc, **les solutions de l'équation différentielle $(\mathbf{E'})$ sont les fonctions définies sur R par $x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-2x}$ où k est une constante réelle**.

2) La fonction h définie sur **R** par $h(x)=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E'})$ avec $k=\dfrac{9}{2}$. Ainsi ***h* est solution de l'équation $(\mathbf{E'})$**.

3) La fonction g est dérivable sur **R**.
De plus, $g=-3\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x)=-3x$. Alors $g'=-3u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u'(x)=-3$.
Par suite, $g'(x)=9\mathrm{e}^{-3x}$.
Par conséquent, pour tout réel *x*, $g'(x)+2g(x)=9\mathrm{e}^{-3x}-6\mathrm{e}^{-3x}=3\mathrm{e}^{-3x}$.
On en déduit que ***g* est solution de l'équation $(\mathbf{E})$**.

4) Comme $f=g+h$, alors $f'=g'+h'$. Ainsi, pour tout réel *x*,

$$f'(x)+2f(x)=(g'+h')(x)+2(g+h)(x)=\left[g'(x)+2g(x)\right]+\left[h'(x)+2h(x)\right].$$

Or $g'(x)+2g(x)=3\mathrm{e}^{-3x}$ et $h'(x)+2h(x)=0$, pour tout réel *x*.
D'où : $f'(x)+2f(x)=3\mathrm{e}^{-3x}$, pour tout réel *x*.
Par conséquent, ***f* est solution de l'équation $(\mathbf{E})$**.

Partie B

1) $\boldsymbol{f(x)}=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}-3\mathrm{e}^{-3x}=3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x}}\right)\boldsymbol{=3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\right)}$, pour tout x de **R**.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$, alors, d'après la limite d'une fonction composée,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}=0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$, alors, d'après la limite d'une fonction composée,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x}=0$.
Donc, par somme de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

Remarque : On en déduit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$, alors, d'après la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$, alors, d'après la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=+\infty$. Alors, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)=-\infty$.

Donc, par produit de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

3) D'après la **partie A**, la fonction f est dérivable sur **R**.
De plus, $f'=g'+h'$. Alors, pour tout réel x,
$f'(x)=3e^{-3x}-2g(x)-2h(x)=3e^{-3x}+6e^{-3x}-9e^{-2x}=9\left(e^{-3x}-e^{-2x}\right)=9e^{-3x}\left(1-e^{x}\right)$.

Comme $9e^{-3x}>0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\left(1-e^{x}\right)$.

Or :
- $1-e^{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1=e^{x} \quad\Leftrightarrow\quad x=0$;
- $1-e^{x}>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1>e^{x} \quad\Leftrightarrow\quad 0>x$;
- $1-e^{x}<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1<e^{x} \quad\Leftrightarrow\quad 0<x$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

4) a) Intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées : déterminons $f(0)$.

Or $f(0)=\frac{3}{2}$.

Donc **la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$**.

b) Intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses : cherchons les solutions de l'équation $f(x)=0$ qui sont les abscisses de ces points d'intersection.

$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\Leftrightarrow 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2}-e^{-x}=0 \quad \text{car} \quad 3e^{-2x}\neq 0\\
&\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow e^{x}=\frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow x\approx -0{,}4
\end{aligned}$$

Donc **la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-0{,}4\,;0)$**.

5) $f(1)=\frac{9}{2}e^{-2}-3e^{-3}\approx 0{,}5$.