DEVOIR MAISON N° 6	
Nombres complexes	***Pour le 20 novembre 2009***

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan $\mathscr{P}$ privé du point O dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par : $z' = z + i - \dfrac{1}{z}$.

1) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.

a) Calculer a' et b'.

b) Placer les points A, A', B et B'.

c) Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

d) En déduire la nature du triangle OBB'.

2) On recherche l'ensemble (E) des points du plan $\mathscr{P}$ privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3) Soit θ un réel.

a) Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)i$.

b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-i$.