

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6

Nombres complexes

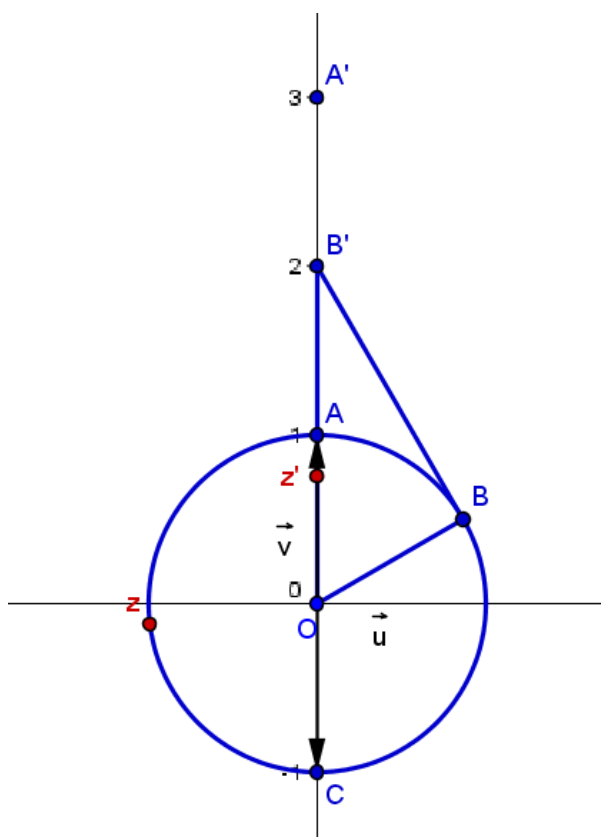
Pour le 20 novembre 2009

Polynésie, septembre 2009

1) a) $\mathbf{a}' = a + i - \frac{1}{a} = 2i - \frac{1}{i} = 2i - \frac{i}{i^2} = 2i + i = 3i$.

$\mathbf{b}' = b + i - \frac{1}{b} = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i = 2i \times \frac{1}{2} + i = 2i$ car $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ pour tout réel θ .

b)



c)
$$\frac{-b}{b' - b} = \frac{-b}{b + i - \frac{1}{b} - b} = \frac{-b^2}{ib - 1} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{3}}}{ie^{i\frac{\pi}{6}} - 1} = -\frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 1} = -\frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Alors
$$\frac{-b}{b' - b} = -\frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{-\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

d) Comme $\arg\left(\frac{-b}{b' - b}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overline{BB'}, \overline{BO})$ et que $\frac{-b}{b' - b}$ est un imaginaire

pur (d'après la question précédente), alors $(\overline{BB'}, \overline{BO}) = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, **le triangle OBB' est rectangle en B .**

2) a) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) &= z^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= z^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4}\right) \\ &= z^2 + iz - 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, **pour tout nombre complexe z , $z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$**

b) $M(z)$ appartient à (E) équivaut à $z' = 0$, c'est-à-dire à $z + i - \frac{1}{z} = 0$.

Or $z + i - \frac{1}{z} = 0$ équivaut à $\frac{z^2 + iz - 1}{z} = 0$, c'est-à-dire à $z^2 + iz - 1 = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que :

$$M(z) \text{ appartient à (E) équivaut à } \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0.$$

Donc $M(z)$ appartient à (E) équivaut à $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Par conséquent, **les affixes des points de l'ensemble (E) sont $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{6}}$.**

c) On sait que $\left|e^{i\frac{7\pi}{6}}\right| = 1$ et $\left|e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$, c'est-à-dire **les points de (E) appartiennent à (Γ).**

3) a) Supposons que $z = e^{i\theta}$. Alors $z' = e^{i\theta} + i - \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} + i = 2i \sin(\theta) + i$.

Par conséquent, **si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)i$.**

b) Si M appartient au cercle (Γ) alors $OM = 1$. D'où le point M a pour affixe $z = e^{i\theta}$ où θ est un réel. D'après la question précédente, $z' = (2\sin(\theta) + 1)i$.

Or pour tout réel θ , $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, d'où $-1 \leq 2\sin\theta + 1 \leq 3$.

Donc M' se trouve sur l'axe des imaginaires purs et sa partie imaginaire est un réel de l'intervalle $[-1; 3]$.

Par conséquent, **si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-i$.**