

DEVOIR MAISON N° 7

Nombres complexes

Pour le 27 novembre 2009

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 , et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\bar{z}(z-2)}{z-2}$.

1) a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1+i$.

b) Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.

c) Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est à dire l'ensemble des points M tels que $M' = M$).

On cherche à généraliser les propriétés 1) b) et 1) c) pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $(z-2)(\bar{z}-2)$ est réel.

b) En déduire que pour tout nombre complexe z distinct de 2 , $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.

c) Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB) . Généraliser les résultats de la question 1) c).

5) Soit M un point distinct de A . Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f . Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2i$.