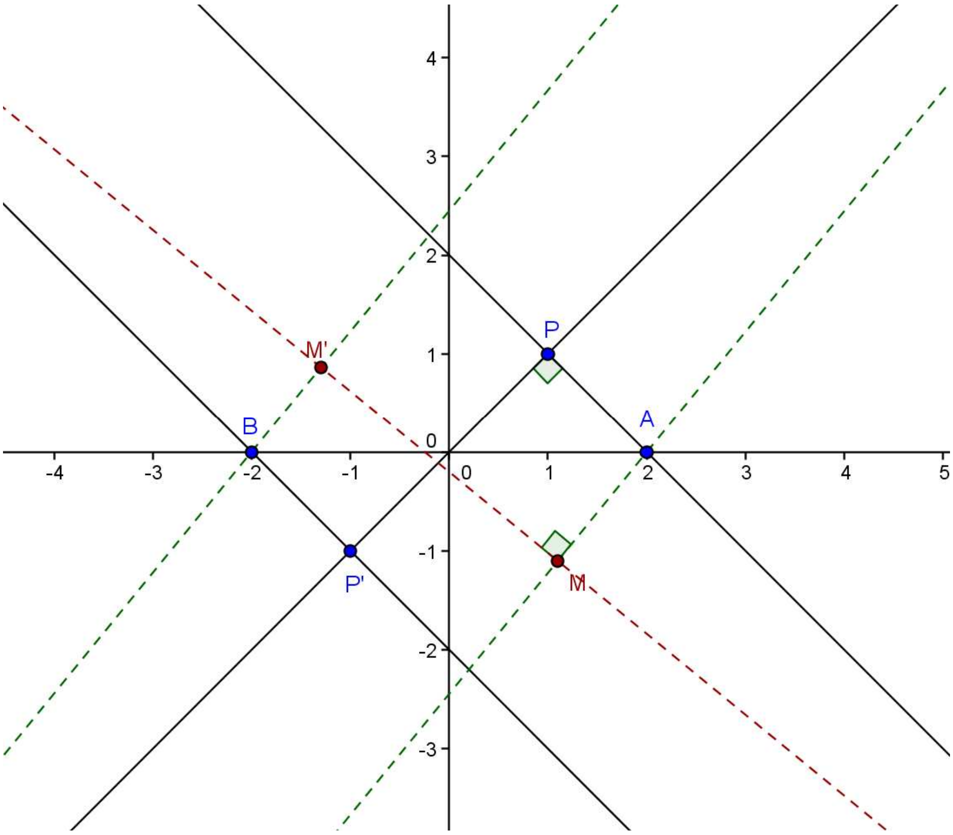
CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 7

Nombres complexes	Pour le 27 novembre 2009

Amérique du Sud, novembre 2009



1) a)

$$z_{P'}=\frac{\overline{z_P}\left(z_P-2\right)}{\overline{z_P}-2}=\frac{(1-i)(-1+i)}{-1-i}=\frac{(1-i)(-1+i)(-1+i)}{(-1)^2+(-1)^2}=\frac{(1-i)(1-2i-1)}{2}=-i(1-i).$$

Par conséquent, **l'affixe du point P', image par f du point P d'affixe $1+i$, est $-1-i$**.

b) Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AP}}=z_P-z_A=1+i-2=-1+i$.

Le vecteur $\overrightarrow{BP'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{BP'}}=z_{P'}-z_B=-1-i+2=1-i$.

On remarque que $z_{\overrightarrow{BP'}}=-z_{\overrightarrow{AP}}$; par suite, $\overrightarrow{BP'}=-\overrightarrow{AP}$.

Par conséquent, **les droites (AP) et (BP') sont parallèles**.

c) $\dfrac{z_{P'}-z_P}{z_P-z_A}=\dfrac{-1-i-1-i}{-1+i}=\dfrac{(-2-2i)(-1-i)}{2}=\dfrac{\cancel{2}(-1-i)^2}{\cancel{2}}=1+2i-1=2i$.

Comme $\dfrac{z_{P'}-z_P}{z_P-z_A}$ est un imaginaire pur et que un argument de $\dfrac{z_{P'}-z_P}{z_P-z_A}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{PP'}\right)$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{PP'}$ sont orthogonaux.

Par conséquent, **les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires**.

2) $M' = M$ équivaut à $z' = z$, avec $z \neq 2$. Or :

$$\begin{aligned} z' = z \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} = z \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{z}(z-2) = z(\overline{z}-2) \\ &\Leftrightarrow \quad -2\overline{z} = -2z \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{z} = z \\ &\Leftrightarrow \quad z \text{ est un réel} \end{aligned}$$

Par conséquent, **l'ensemble des points invariants par *f* est l'axe des réels, privé du point *A***.

3) a) Soit z un nombre complexe.

$(z-2)(\overline{z}-2) = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 = z\overline{z} - 2(z+\overline{z}) + 4$.

Or pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = |z|^2$ et $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

D'où $(z-2)(\overline{z}-2) = |z|^2 - 4\mathrm{Re}(z) + 4$. Comme $|z|$ et $\mathrm{Re}(z)$ sont des réels, on en déduit que, **pour tout nombre complexe *z*, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel**.

b) Soit z un nombre complexe distinct de 2.

$$\frac{z'+2}{z-2} = \frac{\dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}+2}{z-2} = \frac{\dfrac{\overline{z}(z-2)+2(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2}}{z-2} = \frac{z\overline{z}-4}{(z-2)(\overline{z}-2)} = \frac{|z|^2-4}{(z-2)(\overline{z}-2)}.$$

D'après la question précédente, $(z-2)(\overline{z}-2)$ et $|z|^2$ sont des réels.

Par conséquent, **pour tout nombre complexe *z* distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel**.

b) Un argument de $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}\right)$.

Comme $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel, alors $\arg\left(\dfrac{z'+2}{z-2}\right) = 0 \pmod{2\pi}$.

Par conséquent, **les droites (AM) et (BM') sont parallèles**.

4) Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB), c'est-à-dire en dehors de l'axe des réels.

D'après la question 2), on peut dire que les points M et M' sont distincts (c'est-à-dire $z \neq z'$).

Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'}\right)$ est un argument de $\dfrac{z_{M'} - z_M}{z_M - z_A}$, c'est-à-dire de $\dfrac{z'-z}{z-2}$.

$$\frac{z'-z}{z-2} = \frac{\dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}-z}{z-2} = \frac{\dfrac{\overline{z}(z-2)-z(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2}}{z-2} = \frac{-2\overline{z}+2z}{(z-2)(\overline{z}-2)} = \frac{2(z-\overline{z})}{(z-2)(\overline{z}-2)}.$$

Or pour tout nombre complexe z, $z - \overline{z} = 2i \times \mathrm{Im}(z)$.

On en déduit que : $\dfrac{z'-z}{z-2} = \dfrac{4\mathrm{Im}(z)}{(z-2)(\overline{z}-2)} i$.

Comme $\dfrac{4\operatorname{Im}(z)}{(z-2)(\bar{z}-2)}$ est un réel, $\dfrac{z'-z}{z-2}$ est alors un imaginaire pur.

Donc une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{MM'}\right)$ est $\dfrac{\pi}{2}\ \ (\text{mod } \pi)$.

Par conséquent, pour tout point M non situé sur la droite (AB), **les droites (AM) et (MM') sont perpendiculaires**.

5) Soit M un point distinct de A. D'après les questions 3) b) et 4), **le point M' image de M par f est le point d'intersection de deux droites : la parallèle à la droite (AM) passant par B et la droite perpendiculaire à à la droite (AM) passant par M.**