DEVOIR MAISON N° 8	
Nombres complexes, probabilités conditionnelles et suites	***Pour le 4 janvier 2010***

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points *A*, *B* et $\mathcal{I}$ d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_{\mathcal{I}} = 3 + i$.

On note (C) le cercle de centre *O* et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (T) la tangente au cercle (C) en *A.*

À tout point *M* d'affixe *z*, différent de *A,* on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$

Le point M' est appelé l'image de *M.*

Partie A

1) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $\mathcal{I}'$ image de $\mathcal{I}$.
Vérifier que $\mathcal{I}'$ appartient à (C).

2) a) Justifier que pour tout point *M* distinct de *A* et *B*, on a : $OM' = \dfrac{MB}{MA}$.

b) Justifier que pour tout point *M* distinct de *A* et *B*, on a : $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, *M* désigne un point quelconque de (Δ).

On cherche à construire géométriquement son image M'.

1) Démontrer que M' appartient à (C).

2) On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en *N.*

a) Justifier que les triangles *AMB* et *AON* sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AN}\right) = \left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$, démontrer que $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)$.

b) En déduire une construction de M'.

C. Lainé

Exercice 2

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

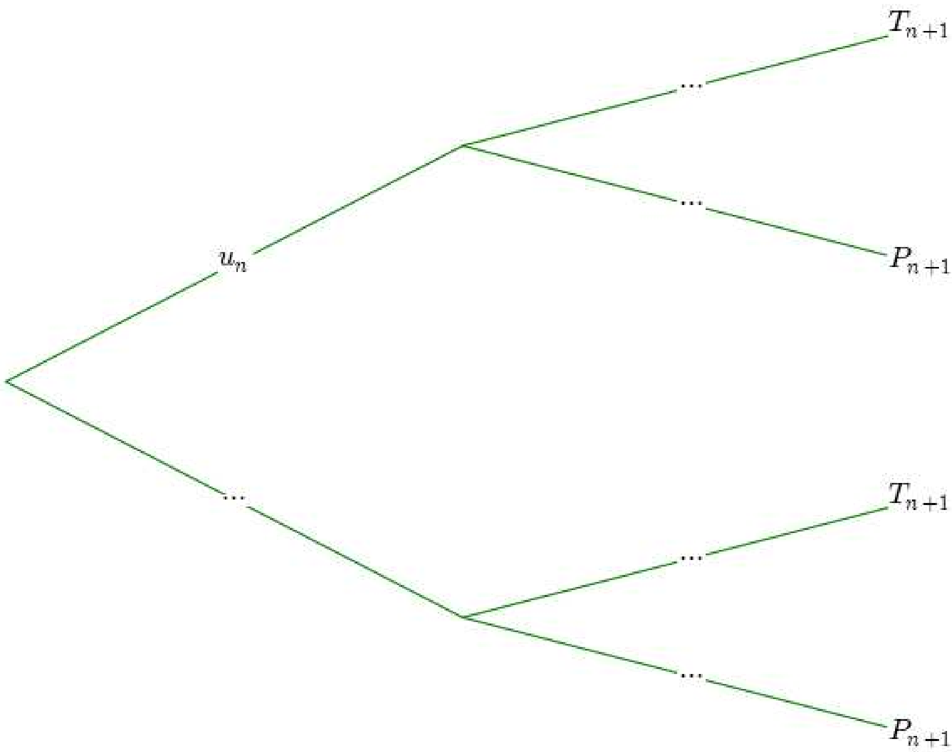
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n > 1$ par : $u_n = p(T_n)$ où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1) a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

b) Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

c) Recopier et compléter l'arbre suivant.



d) Démontrer que pour tout entier $n > 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.

e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n > 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise dans la question 1) e) ?