CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 8	
Nombres complexes, probabilités conditionnelles et suites	***Pour le 4 janvier 2010***

Exercice 1 *(France, septembre 2008)*

Partie A

1) $\boldsymbol{z_{I'}} = \dfrac{z_I - 5}{z_I - 1} = \dfrac{3+i-5}{3+i-1} = \dfrac{-2+i}{2+i} = \dfrac{(-2+i)(2-i)}{2^2+1^2} = \dfrac{-4+2i+2i+1}{5} \boldsymbol{= -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i}$.

$OI' = |z_{I'}| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25}} = 1$; par suite, $\boldsymbol{I'}$ **appartient à (C)**.

2) a) Soit M un point distinct de A et B. $OM' = |z'| = \left|\dfrac{z-5}{z-1}\right| = \dfrac{|z-5|}{|z-1|} = \dfrac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \dfrac{MB}{MA}$.

Par conséquent, **pour tout point *M* distinct de *A* et *B*, on a :** $\boldsymbol{OM' = \dfrac{MB}{MA}}$.

b) Soit M un point distinct de A et B.

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM'}\right) = \arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-5}{z-1}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{MB}}}{z_{\overrightarrow{MA}}}\right) = \left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}\right)$.

Par conséquent, **pour tout point *M* distinct de *A* et *B*, on a :** $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}\right)}$.

Partie B

1) Soit M un point quelconque de (Δ). Alors, $MA = MB$.
D'où, d'après la question 2) a) de la **partie A**, $OM' = 1$. Donc $\boldsymbol{M'}$ **appartient à (C)**.

2) a) ● Comme M appartient à (Δ), médiatrice de $[AB]$, alors **le triangle *AMB* est isocèle en *M***.

Comme N et A sont deux points du cercle (C), alors **le triangle *AON* est isocèle en *O***.

● Par symétrie par rapport à la droite (T), $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}\right)} = -\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}\right) = \boldsymbol{\left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}\right)}$.

Alors : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right) = \left(-\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{ON}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{ON}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}\right) + \left(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{ON}\right)$.

D'où : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}\right) + \left(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{ON}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{ON}\right)$.

De plus, $\left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BM}\right)$

$\left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BM}\right)$.

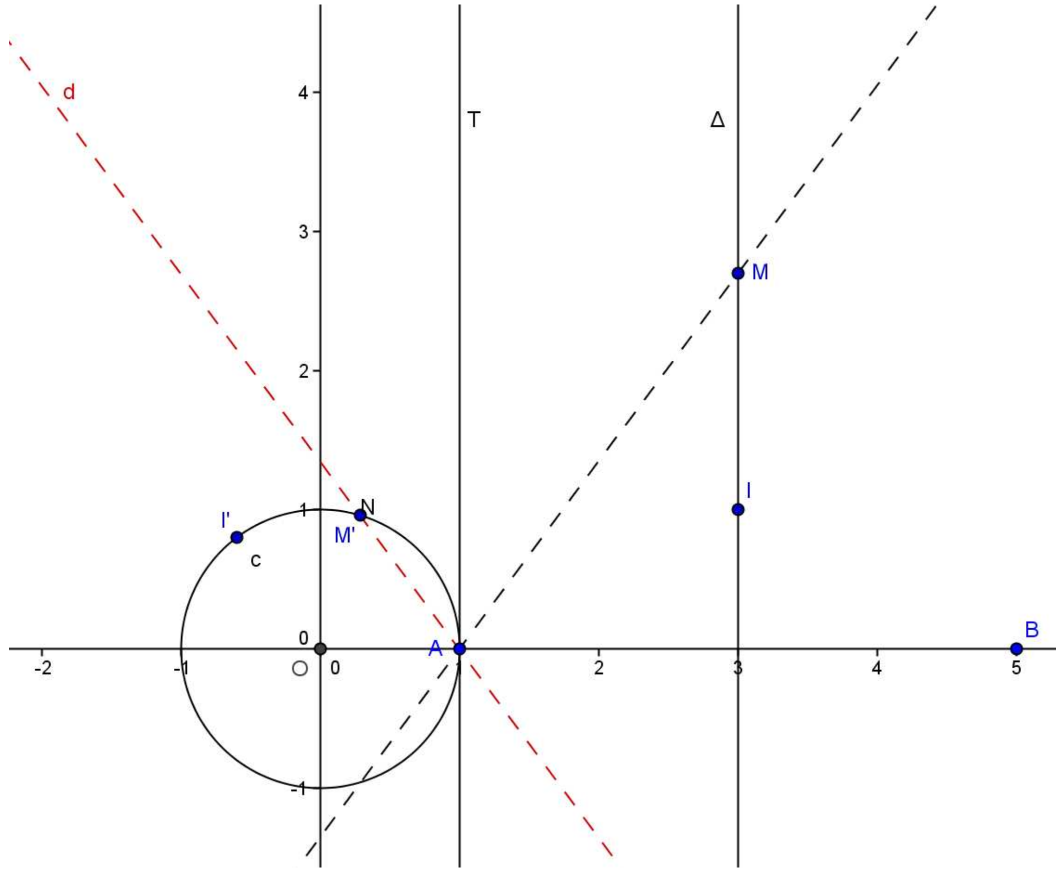
Or AMB est isocèle en M, alors $\left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}\right)$.

Et AOB est isocèle en O, alors $\left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}\right) = \left(\overrightarrow{NA} ; \overrightarrow{NO}\right) = \left(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{ON}\right)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}\right)}$.

b) D'après les questions précédentes, on en déduit que **les points $\boldsymbol{M'}$ et *N* sont confondus**.

M' est donc le point d'intersection de (C) et de la droite symétrique à (AM) par rapport à (T).



Exercice 2 *(Nouvelle-Calédonie, novembre 2009)*

1) a) Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Alors $\boldsymbol{p(T_1) = p(P_1) = \frac{1}{2}}$.

Si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Alors $\boldsymbol{p_{T_1}(T_2) = 0,3}$.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Alors $\boldsymbol{p_{P_1}(T_2)} = 1 - 0,8 = \boldsymbol{0,2}$.

b) Les événements T_1 et P_1 forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule des probabilités totales : $p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2)$.

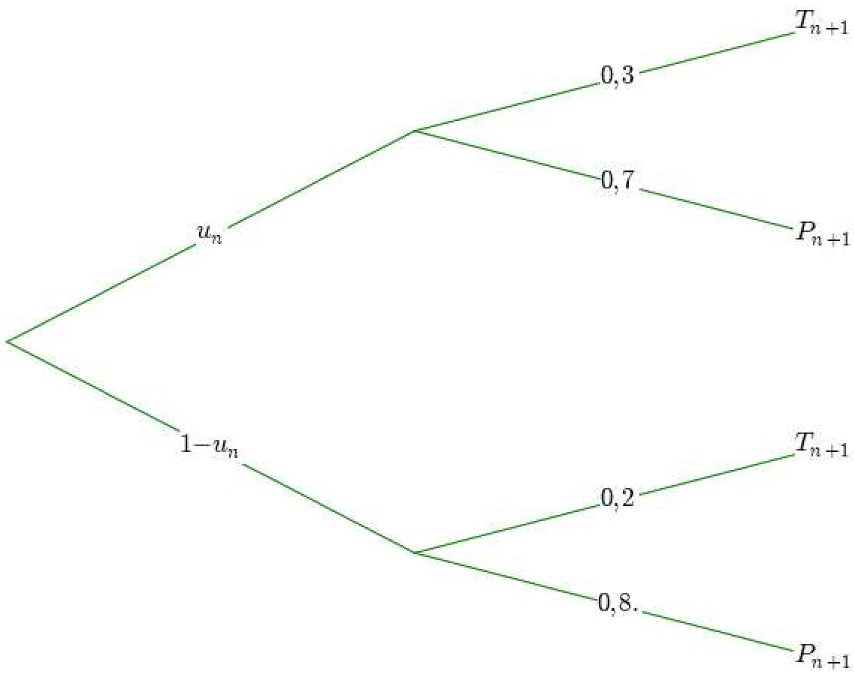
Donc : $p(T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25$. Par suite, $\boldsymbol{p(T_2) = \frac{1}{4}}$.

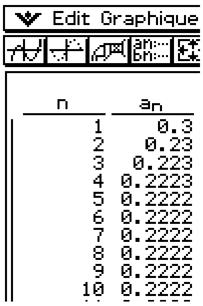
c) Voir page suivante.

d) Les événements T_n et P_n forment une partition de l'univers Ω.
D'après la formule des probabilités totales :

$$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1}).$$

Par suite, $\boldsymbol{u_{n+1}} = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = \boldsymbol{0,1\, u_n + 0,2}$ **, pour tout entier $\boldsymbol{n > 1}$.**



e) 
Edit Graphique

n	an
1	0.3
2	0.23
3	0.223
4	0.2223
5	0.2222
6	0.2222
7	0.2222
8	0.2222
9	0.2222
10	0.2222

Il semble que la suite (u_n) ait pour limite 0,2222.

2) a) Soit n un entier strictement supérieur à 1.

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0{,}1\,u_n + 0{,}2 - \frac{2}{9} = 0{,}1\left(v_n + \frac{2}{9}\right) + 0{,}2 - \frac{2}{9} = 0{,}1\,v_n + \frac{0{,}2}{9} + \frac{1{,}8}{9} - \frac{2}{9} = 0{,}1\,v_n = \frac{1}{10}v_n$

De plus, $v_2 = u_2 - \frac{2}{9} = 0{,}1 \times 0{,}5 + 0{,}2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$.

Par conséquent, **la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_2 = \frac{1}{36}$**.

b) D'après la question précédente, $\boldsymbol{v_n} = v_2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} \boldsymbol{= \frac{1}{36} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}}$**, pour tout entier $n > 1$**.

Or $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, alors $\boldsymbol{u_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}}$**, pour tout entier $n > 1$**.

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 100 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{10} < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$.

Par produit des limites, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} = 0$. Donc par somme de limites, $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}}$.

Or $\frac{2}{9} \simeq 0{,}2222$; ce qui confirme la conjecture émise dans la question 1) e).