

## DEVOIR MAISON N° 9

Fonction logarithme népérien

Pour le 22 janvier 2010

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ .

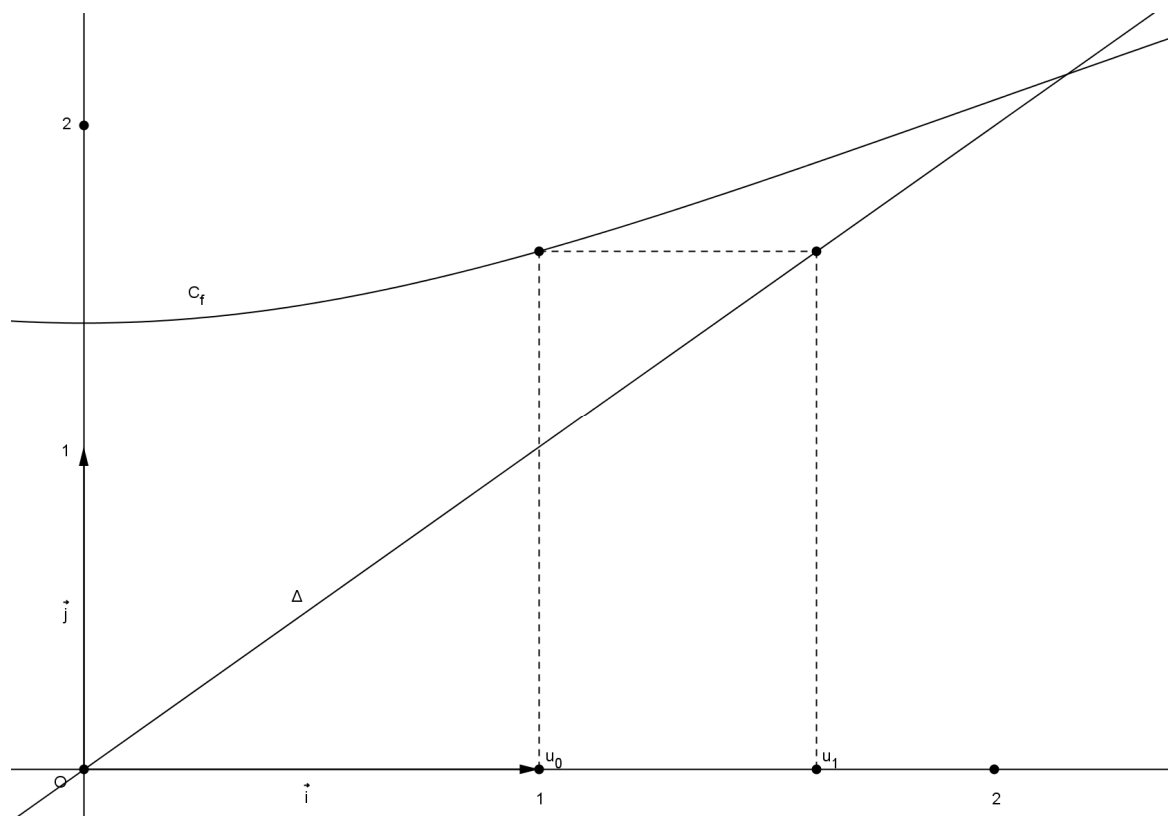
### Partie A

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .
  - a) Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - b) Montrer que sur l'intervalle  $[2 ; 3]$  l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution que l'on notera  $\alpha$ .  
Donner la valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
  - c) Justifier que le nombre réel  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$ .

### Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  sont tracées sur le graphique donné ci-dessous.



1) À partir de  $u_0$ , en utilisant la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\Delta$ , on a placé  $u_1$  sur l'axe des abscisses.

De la même manière, placer les termes  $u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

2) Placer le point  $\mathcal{I}$  de la courbe  $\mathcal{C}$  qui a pour abscisse  $\alpha$ .

3) a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.

c) Déterminer sa limite.