CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 9

Fonction logarithme népérien	*Pour le 22 janvier 2010*

France, septembre 2009

Partie A

1) On remarque que $f = \ln \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 4$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0 ; +\infty[$; alors la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

D'où : $f' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x$. Donc $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$, pour tout réel x positif.

Comme $2x \geq 0$ et $x^2 + 4 > 0$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$. On en déduit que **la fonction f est strictement croissante sur $[0 ;+\infty[$**.

2) a) On a : $g = f - v$ avec $v(x) = x$.

Les fonctions f et v sont dérivables sur $[0 ; +\infty[$, alors g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

D'où : $g' = f' - v'$ avec $v'(x) = 1$. Par suite, $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} - 1 = \dfrac{-x^2+2x-4}{x^2+4}$.

Comme $x^2 + 4 > 0$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$, alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-x^2 + 2x - 4$.

Calculons le discriminant Δ de ce trinôme : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = -12$.

Comme $\Delta < 0$, alors le signe de $-x^2 + 2x - 4$ est le même que celui du coefficient de x^2, c'est-à-dire strictement négatif pour tout x de $[0 ; +\infty[$.

Par conséquent, **la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ;+\infty[$**.

b) La fonction g est dérivable donc continue sur l'intervalle $[2 ; 3]$. De plus, la fonction g est strictement décroissante sur $[2 ; 3]$.

Enfin, $g(2) = \ln(8) - 2 \approx 0{,}1$ et $g(3) = \ln(13) - 3 \approx -0{,}4$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2 ; 3]$**.

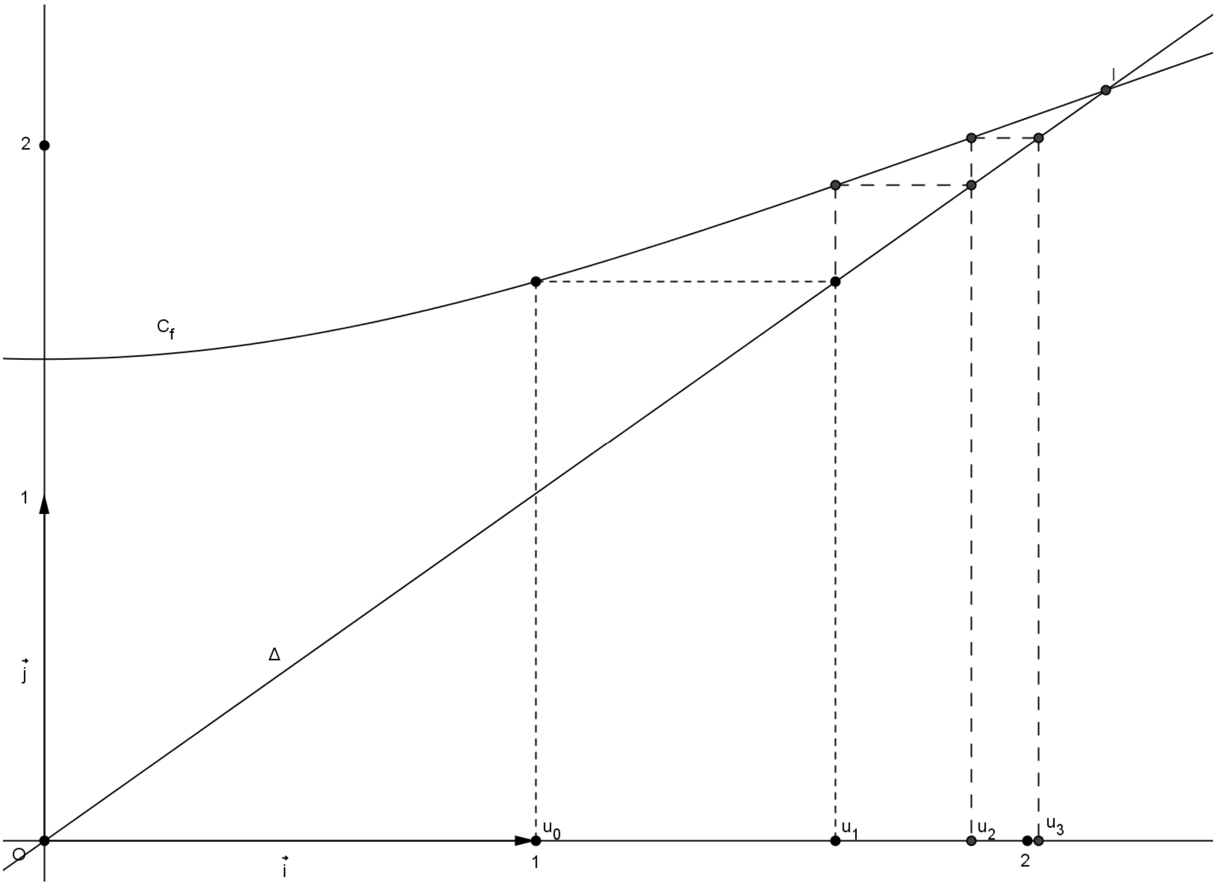
x	y1
2	0.0794
2.1	0.0294
2.2	-0.02
2.3	-0.071
2.4	-0.121
2.5	-0.172
2.6	-0.224
2.7	-0.276
2.8	-0.328
2.9	-0.381
3	-0.435

D'après la calculatrice, on en déduit que **$\alpha \approx 2{,}2$ à 10^{-1} près**.

c) Comme $g(x) = 0$ équivaut à $f(x) - x = 0$, c'est-à-dire à $f(x) = x$, d'après la question précédente, on en déduit que **le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$**.

Partie B

1) et 2)



3) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq \alpha$ »

→ *Initialisation* : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et on a bien $1 \leq u_0 \leq \alpha$; par suite, on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $1 \leq u_n \leq \alpha$.
Comme la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$.
D'où : $\ln(5) \leq u_{n+1} \leq \alpha$ (en effet $f(\alpha) = \alpha$).
Or $\ln(5) > 1$, on en déduit que $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Par suite, $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

→ *Conclusion* : on a alors prouvé :
$\mathscr{P}(0)$ est vraie et pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n + 1)$.
Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :
pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n)$ est vraie
C'est-à-dire : **pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq \alpha$** .

b) Soit Q(n) la proposition : « pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$ »

→ *Initialisation* : pour $n = 0$, $u_0 \leq u_1$ d'après le graphique ; par suite, on a Q (0) qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que Q (n) est vraie. Alors : $u_n \leq u_{n+1}$.
Comme la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Par suite, Q (n + 1) est vraie.

→ *Conclusion* : on a alors prouvé :

Q (0) est vraie et pour tout n supérieur ou égal à 0, Q (n) $\Rightarrow$ Q (n + 1).

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, Q (n) est vraie

C'est-à-dire : **pour tout entier naturel** $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_n \leq u_{n+1}}$. Par conséquent, **la suite** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante**.

De plus, la suite (u_n) est majorée par α ; on en déduit que **la suite** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est convergente vers un réel** $\boldsymbol{l}$.

c) Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, par « passage aux limites », $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$.

Or la fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc en l. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Par suite, $f(l) = l$. D'après la partie A, on en déduit que **la suite** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est convergente vers** $\boldsymbol{\alpha}$.