

CORRECTION DU BAC BLANC

Terminale S

Le 18 février 2010

Exercice 1 (Liban, juin 2005)

1) **FAUX**. En effet, soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, pourtant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2) **FAUX**. En effet, $e^{\ln(x)}$ n'est définie que si x appartient à $]0 ; +\infty[$.

3) **VRAI**. En effet, pour tout réel x strictement positif, $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire

$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

4) **FAUX**. Prenons la fonction f définie sur \mathbf{R}^* par $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

On a alors :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$.

Par conséquent, la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote verticale d'équation $x = 0$.

5) **VRAI**. On remarque que $f = uv$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = e^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbf{R} , d'où f est dérivable sur \mathbf{R} .

Alors $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = e^x$.

D'où : $f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x = (x^2 + 5x + 4)e^x$, pour tout réel x .

Par suite, $f'(x) - f(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x - (x^2 + 3x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$.

Par conséquent, **f est une solution de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$** .

6) **VRAI**. Comme G est le barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1, et que I est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2 , alors, d'après le théorème d'associativité du barycentre, G est le barycentre des points pondérés $(I, 1)$ et $(C, 1)$. Par suite, G est le milieu du segment $[CI]$.

7) **FAUX**. En effet, d'après la propriété fondamentale du barycentre, pour tout point M du plan, $3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC} = (3 - 2 + 1)\overline{MG} = 2\overline{MG}$.

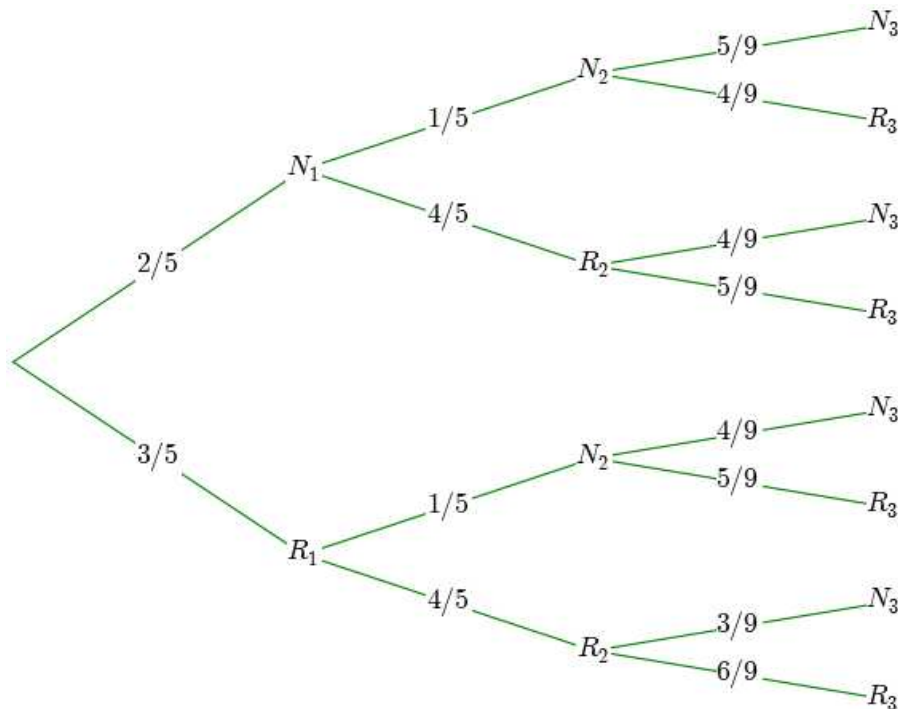
Alors $\|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 1$ équivaut à $\|2\overline{MG}\| = 1$, c'est-à-dire à $MG = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des points du plan tels que $\|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$.

8) **FAUX**. En effet, si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$, distinct de A et de B , alors AMB est rectangle en M ; et, par suite, $\overline{MA} \bullet \overline{MB}$ est nul.

Exercice 2 (La Réunion, juin 2005)

1)



2) a) • $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$.

$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$.

b) On remarque que $N_1 \cap N_3 = (N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap R_2 \cap N_3)$ avec $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$ deux événements disjoints.

On en déduit que $p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{42}{225}$.

Donc $p(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75}$.

c) On remarque que $R_1 \cap N_3 = (R_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap N_3)$ avec $R_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $R_1 \cap R_2 \cap N_3$ deux événements disjoints. On en déduit que :

$p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{48}{225}$.

Donc $p(R_1 \cap N_3) = \frac{16}{75}$.

3) N_3 est la réunion des deux événements disjoints $N_1 \cap N_3$ et $R_1 \cap N_3$.

Alors $p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3) = \frac{14}{75} + \frac{16}{75} = \frac{30}{75}$. Par conséquent, $p(N_3) = \frac{2}{5}$.

4) $p(N_1) \times p(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. D'après la question 2) b), $p(N_1) \times p(N_3) \neq p(N_1 \cap N_3)$.

Donc les évènements N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5) On recherche $p_{N_3}(R_1)$. Or $p_{N_3}(R_1) = \frac{p(N_3 \cap R_1)}{p(N_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \frac{16}{75} \times \frac{5}{2} = \frac{8}{15}$.

Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge est égale à $\frac{8}{15}$.

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2009)

1) a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, alors $z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Donc $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

De façon évidente, $z_B = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) Voir ci-dessous.

c) D'après la question précédente, z_A et z_B ont le même module égal à 2.

Par suite, $OA = OB = 2$. D'où le triangle OAB est isocèle en O .

De plus, $AB = |z_B - z_A| = |2i - (1 + i\sqrt{3})| = |-1 + (2 - \sqrt{3})i| = \sqrt{1 + (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

Comme AB est différente de 2 et de $\sqrt{8}$, OAB n'est ni équilatéral, ni rectangle.

2) a) D'après la question 1) a), $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

On en déduit qu'un argument de $\frac{z_A}{z_B}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

Par conséquent, l'angle $(\overline{OA}, \overline{OB})$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$.

b) Comme r est la rotation de centre O qui transforme A en B , alors l'angle de la rotation est

$(\overline{OA}, \overline{OB})$. Donc r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Par conséquent, l'écriture complexe de r est de la forme $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O)$, c'est-à-dire $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$.

3) a) L'image de Γ par la rotation r est un cercle de centre $r(A)$ et de rayon 2. Or $r(A) = B$

Par conséquent, l'image de Γ par la rotation r est le cercle Γ' .

b) Comme I est le milieu de $[AB]$, alors $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$.

c) Comme C est le point d'intersection de Γ et Γ' , alors $AC = BC = 2$.

De plus, $AO = BO = 2$. On en déduit que $AC = BC = OB = OC$.

Par conséquent, le quadrilatère $OACB$ est un losange.

d) Comme $OACB$ est un losange, alors les diagonales $[AB]$ et $[OC]$ se coupent en leur milieu. Or I est le milieu de $[AB]$, donc I est le milieu de $[OC]$.

Par suite, $\overline{OC} = 2\overline{OI}$, et ainsi $z_{OC} = 2z_{OI}$. Par conséquent, $z_C = 2z_I = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

$$4) a) AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

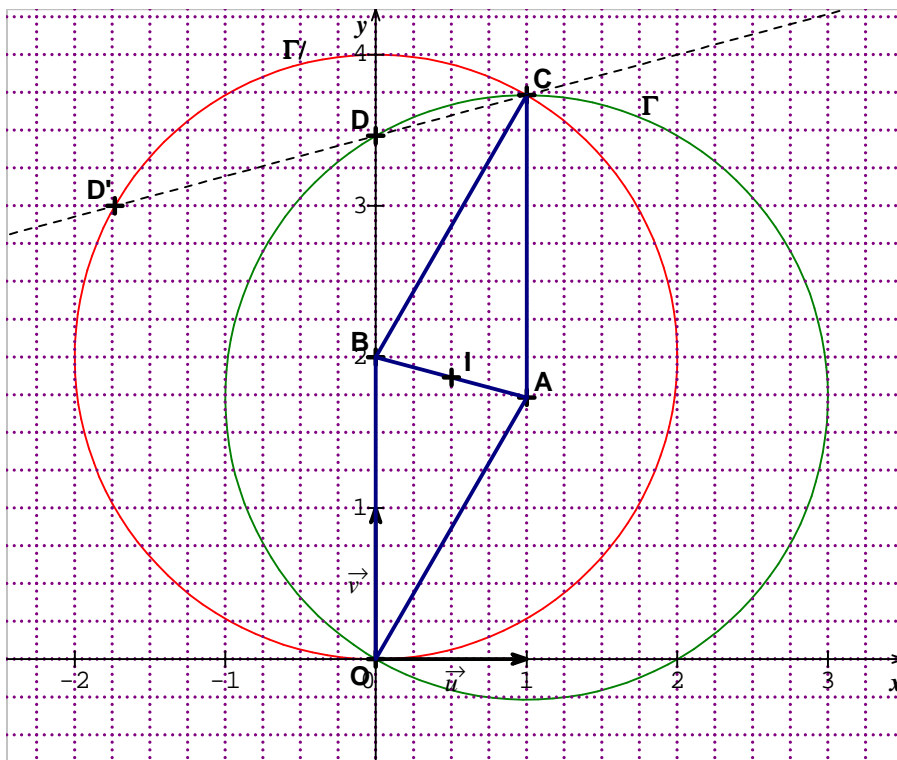
Le point D appartient donc au cercle Γ .

$$b) \text{ Comme } D' \text{ est l'image de } D \text{ par } r, \text{ alors } z_{D'} = e^{i\frac{\pi}{6}} z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i.$$

$$5) \frac{z_{D'} - z_D}{z_D - z_C} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i) - 2i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3} - [1 + (2 + \sqrt{3})i]} = \frac{-\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i}{-1 + (-2 + \sqrt{3})i} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)i}{-1 + (-2 + \sqrt{3})i} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Par suite, } (\overline{CD}, \overline{DD'}) = \arg\left(\frac{z_{D'} - z_D}{z_D - z_C}\right) = \arg(\sqrt{3}) = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Par conséquent, les vecteurs \overline{DC} et $\overline{DD'}$ sont colinéaires.
On en déduit que les points C, D et D' sont alignés.



Exercice 4 (Asie, juin 2009)

Partie A : existence et unicité de la solution

1) La fonction f est la somme des deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ strictement croissantes sur $]0 ; +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ (par somme de limites).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ (par somme de limites).}$$

Comme la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, et que $0 \in]-\infty ; +\infty[$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.**

$$3) f(1) = 1 + \ln 1 = 1 > 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2) \approx -0,19 < 0.$$

Comme f réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur \mathbf{R} et que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f(1)$, alors $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

1) a) On remarque que $g = \frac{1}{5}(u - v)$ avec $u(x) = 4x$ et $v(x) = \ln x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0 ; +\infty[$, alors g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Alors : $g' = \frac{1}{5}(u' - v')$ avec $u'(x) = 4$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc $g'(x) = \frac{1}{5}\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{4x-1}{5x}$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

Comme x appartient à $]0 ; +\infty[$, alors $5x > 0$; le signe de $g'(x)$ dépend donc de celui de $(4x-1)$. Or $4x-1=0$ équivaut à $x = \frac{1}{4}$, $4x-1 > 0$ équivaut à $x > \frac{1}{4}$ et $4x-1 < 0$ équivaut

à $x < \frac{1}{4}$. Donc **g est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{4}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{4} ; +\infty[$.**

b) Soit x un réel de l'intervalle $]\frac{1}{2} ; 1]$.

Comme la fonction g est strictement croissante sur $]\frac{1}{4} ; +\infty[$, alors $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1)$.

$$\text{Or } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5} = \frac{2 + \ln(2)}{5} \approx 0,54 \text{ et } g(1) = \frac{4 - \ln 1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

On en déduit que $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$, pour tout x de $]\frac{1}{2} ; 1]$.

c) Soit x un réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de l'équation } g(x) = x &\Leftrightarrow \frac{4x - \ln x}{5} = x \\
&\Leftrightarrow 4x - \ln x = 5x \\
&\Leftrightarrow -x = \ln x \\
&\Leftrightarrow x \text{ est solution de l'équation (E)}
\end{aligned}$$

Donc un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de \mathbf{N} , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ »

→ Initialisation : comme $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 + \ln(2)}{5} \approx 0,54$, alors on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, alors

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1), \text{ c'est-à-dire } 0,54 < u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,8.$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$$\mathcal{P}(0) \text{ et pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 0, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}$$

C'est-à-dire : pour tout n de \mathbf{N} , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, alors elle converge vers un réel l .

Comme $u_{n+1} = g(u_n)$, par passage aux limites, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = l. \text{ De plus, } g \text{ est dérivable, donc continue, sur } \left[\frac{1}{2} ; 1\right] \text{ et comme } l \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right],$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow l} g(x) = g(l).$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(l). \text{ On en déduit alors que } g(l) = l.$$

D'après la question 1) c) de la partie B, l est la solution de l'équation (E), c'est-à-dire que $l = \alpha$. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers α .

3) a) $u_{10} \approx 0,567124$.

b) Comme on admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α , alors $u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5 \times 10^{-4}$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5 \times 10^{-4} &\Leftrightarrow 0,567124 \leq \alpha \leq 0,567124 + 5 \times 10^{-4} \\
&\Leftrightarrow 0,567124 \leq \alpha \leq 0,567624
\end{aligned}$$

Par conséquent, un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$, où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales, est : $0,567 \leq \alpha \leq 0,568$.

