

| | | |
|------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| BACCALAURÉAT BLANC | | Session 2010 |
| <i>Épreuve de :</i> MATHÉMATIQUES | | |
| <i>Série :</i> S | <i>Durée :</i> 4 heures | <i>Coefficient :</i> 9 |

SPECIALITÉ



L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices. Il est demandé de traiter chaque exercice sur des copies séparées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. **Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».**

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1) « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a ; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ».

2) Pour tout réel x , $e^{\ln(x)} = x$.

3) « Si f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ ».}$$

4) On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

« Si f est une fonction définie sur \mathbf{R}^* alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ».

5) « La fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ ».

6) Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2 .

« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment $[CI]$ ».

7) Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

« L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

8) Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ».

Exercice 2 : (5 points)

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p , alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ modulo p ».

Partie A : quelques exemples

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , 4^n est congru à 1 modulo 3.
- 2) Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
- 3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.
En déduire que, pour tout entier k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
- 4) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est divisible par 5 ?
- 5) À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B : divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

- 1) Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1$ modulo p .
- 2) Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1$ modulo p . On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1$ modulo p , et r le reste de la division euclidienne de n par b .
 - a) Démontrer que $4^r \equiv 1$ modulo p . En déduire que $r = 0$.
 - b) Prouver l'équivalence :
« $4^n - 1$ est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b ».
 - c) En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 3 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.

1) a) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

c) Déterminer la nature du triangle OAB .

2) On note r la rotation de centre O qui transforme A en B . Pour tout point M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M' .

a) Calculer un argument du quotient $\frac{z_A}{z_B}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b) En déduire l'écriture complexe de la rotation r .

3) Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O . Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.

a) Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r .

b) Calculer l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$.

c) Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$.

d) En déduire que I est le milieu de $[OC]$, puis montrer que l'affixe de C est

$$z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

4) Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.

a) Justifier que le point D appartient au cercle Γ . Placer D sur la figure.

b) Placer D' image de D par la rotation r définie à la question 2). On note $z_{D'}$ l'affixe de D' .

Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$.

5) Montrer que les vecteurs \overrightarrow{DC} et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 : (6 points)

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

- 1) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- 3) Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

- 1) Étude de quelques propriétés de la fonction g .
 - a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
 - c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
- 2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a) En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
 - b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .
- 3) Recherche d'une valeur approchée de α .
 - a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10} , arrondie à la sixième décimale.
 - b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α .
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.