DEVOIR COMMUN N° 1		Année scolaire 2009-2010
Épreuve de : MATHÉMATIQUES (Obligatoire)		
Série : S	*Durée* : 4 heures	

COLLÈGE PROTESTANT FRANÇAIS

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le candidat doit traiter QUATRE exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, et des constructions des courbes, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

C. Lainé

Exercice 1 (4 *points*)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1) a) Calculer u_1.

b) Les premières valeurs de u_n sont données ci-dessous :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	45	77	117	165	221	285	357	437	525	621

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2) On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.

Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4) Valider la conjecture émise à la question 1) b).

C. Lainé

Exercice 2 (4 *points*)

1) Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant :

« La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur **R** telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$. »

Soit a un réel donné.

a) Montrer que la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b) Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur **R** par

$h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos(x)$.

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur **R** par :

$f_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d) En déduire les solutions de (E).

e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

C. Lainé

Exercice 3 (5 *points*)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur **R** par $\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1$.

On admettra que pour tout entier naturel *n*, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

1) a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Étudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur **R**.

2) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans **R**, dont l'une dans l'intervalle $[1\,;\ +\infty[$ qui sera notée α.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur **R** et le présenter dans un tableau.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes

Sur la feuille de l'annexe 1 sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions *f* et *g*.

Ces fonctions sont définies par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Ces courbes sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1) Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admettent en ce point la même tangente.

2) a) Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la ***partie A***.

b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 4 (7 *points*)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\ ;\vec{i},\ \vec{j}\right)$. On s'intéresse aux fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant les conditions :

(1) pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)=4-\left[f(x)\right]^2$;

(2) $f(0)=0$.

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe 2 sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A : étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction *f*, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2. On obtient ainsi une suite de points notée (M_n), d'abscisse (x_n) et d'ordonnée (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_0=0, & x_{n+1}=x_n+0{,}2 \\ y_0=0, & y_{n+1}=-0{,}2y_n^2+y_n+0{,}8 \end{cases}.$$

1) a) Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe 2. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b) Placer sur le graphique donné en annexe les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2) a) Pour x réel, on pose $p(x)=-0{,}2x^2+x+0{,}8$.

Montrer que si $x\in[0\ ;\ 2]$ alors $p(x)\in[0\ ;\ 2]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le y_n\le 2$.

c) Sachant qu'une suite croissante et majorée est convergente, peut-on affirmer que la suite (y_n) est convergente ?

Partie B: étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1) Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2) a) Montrer que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

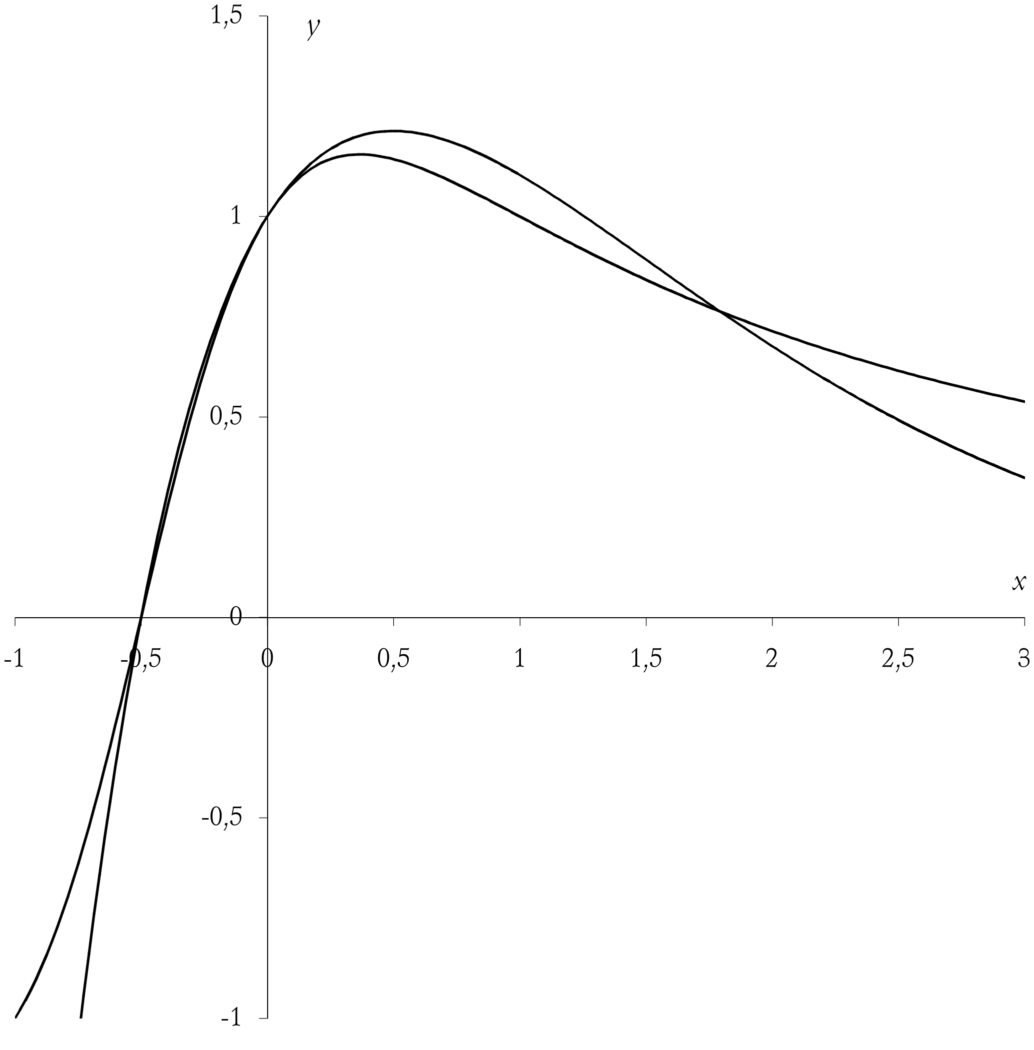
b) Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\mathscr{C}_g$ à l'origine.

4) Tracer dans le repère de l'annexe 2 la courbe $\mathscr{C}_g$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette **partie B**.

C. Lainé

ANNEXE 1



ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

Partie B