

## CORRECTION DU DEVOIR COMMUN N° 1

**Suites, dérivation, équation différentielle et fonction exponentielle.**

**Le 14 novembre 2009**

### Exercice 1 (La Réunion, juin 2008)

1) a)  $u_1 = \left(1 + \frac{2}{1}\right)u_0 + \frac{6}{1} = 15 + 6 = 21.$

b)

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d_n$	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88

**Il semble que la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une suite arithmétique de raison 8.**

2) Soit la suite arithmétique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de raison 8 et de premier terme  $v_0 = 16.$

Alors  $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = \frac{n(v_0 + v_{n-1})}{2}.$  Or  $v_{n-1} = v_0 + (n-1) \times 8 = 16 + 8n - 8 = 8n + 8.$

Donc  $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = \frac{n(16 + 8n + 8)}{2} = \frac{n(8n + 24)}{2} = n(4n + 12).$

Par conséquent, **la somme des  $n$  premiers termes de cette suite est égale à  $4n^2 + 12n.$**

3) Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « pour tout entier naturel  $n, u_n = 4n^2 + 12n + 5$  »

→ Initialisation :  $4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5 = u_0,$  alors on a  $\mathcal{P}(0)$  qui est vraie.

→ Hérédité : Soit  $n \geq 0.$  Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors :  $u_n = 4n^2 + 12n + 5.$  D'où :

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1} = \frac{(n+3)(4n^2 + 12n + 5) + 6}{n+1}.$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+3)(4n^2 + 12n + 5) + 6}{n+1} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 5n + 12n^2 + 36n + 15 + 6}{n+1} = \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1} - \left[4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5\right] &= \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1} - \left[4n^2 + 20n + 21\right] \\ &= \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21 - (4n^2 + 20n + 21)(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21 - (4n^3 + 24n^2 + 41n + 21)}{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $u_{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5.$  Par suite,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$$\mathcal{P}(0) \text{ et pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout entier naturel  $n, \mathcal{P}(n)$  est vraie

C'est-à-dire : **pour tout entier naturel  $n, u_n = 4n^2 + 12n + 5.$**

4) Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned} d_n = u_{n+1} - u_n &= \left[ 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 \right] - (4n^2 + 12n + 5) \\ &= (4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5) - (4n^2 + 12n + 5) \\ &= 8n + 16 \\ &= v_n \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme 16.

**Exercice 2** (Amérique du Sud, septembre 2007)

1) a) On remarque que  $f = e^u$  avec  $u(x) = ax$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ , alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

$f' = u'e^u$  avec  $u'(x) = a$ . D'où, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = a e^{ax}$ , c'est-à-dire que  $f'(x) = a f(x)$ .

Par conséquent, la fonction  $f$  est solution de l'équation  $y' = ay$ .

b) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $h(x) = g(x)e^{-ax}$ .

La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  en tant que produit de deux fonctions  $f$  et  $g$  dérivables sur  $\mathbf{R}$ . Alors pour tout réel  $x$ ,

$$h'(x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x) = g'(x)e^{-ax} + g(x)(-ae^{-ax}) = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}.$$

Comme  $g$  est une solution de l'équation  $y' = ay$ , alors  $g'(x) - ag(x) = 0$  pour tout réel  $x$ .

Par suite,  $h'(x) = 0$  pour tout réel  $x$ .

Par conséquent,  $h$  est une fonction constante.

c) D'après la question précédente, on en déduit que lorsque  $g$  est une solution de l'équation  $y' = ay$ , on a :  $g(x)e^{-ax} = C$  où  $C$  est une constante réelle.

D'où :  $g(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$  où  $C$  est une constante réelle.

Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  sont les fonctions  $g$  définies sur  $\mathbf{R}$  par  $g(x) = Ce^{ax}$  où  $C$  est une constante réelle.

2) a) Soit un réel  $x$ .

$f_0$  est une solution de (E)  $\Leftrightarrow f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos(x)$ , pour tout réel  $x$

$$\Leftrightarrow -a \sin(x) + b \cos(x) = 2(a \cos(x) + b \sin(x)) + \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow -a \sin(x) + b \cos(x) = 2(a \cos(x) + b \sin(x)) + \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow -a \sin(x) + b \cos(x) = (2a + 1) \cos(x) + 2b \sin(x), \text{ pour tout réel } x$$

Par identification, on obtient :  $\begin{cases} 2a + 1 = b \\ 2b = -a \end{cases}$ .

$$\text{Or } \begin{cases} 2a + 1 = b \\ 2b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2 = -a \\ 2b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -2 \\ b = -\frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Par conséquent, la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_0(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x)$  est une solution de (E).

b) Les solutions de l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) sont les fonctions définies sur  $\mathbf{R}$  par  $x \mapsto C e^{2x}$  où  $C$  est une constante réelle.

c) • Soit  $f$  une solution de (E). Alors, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2f(x) + \cos(x)$  (1).

Comme  $f_0$  est une solution de (E), pour tout réel  $x$ ,  $f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos(x)$  (2).

En soustrayant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient que :

$$f'(x) - f_0'(x) = 2f(x) - 2f_0(x), \text{ c'est-à-dire } f' - f_0' = 2f - 2f_0, \text{ ou encore } (f - f_0)' = 2(f - f_0).$$

Donc,  $f - f_0$  est une solution de (E<sub>0</sub>).

• Réciproquement, supposons que  $f - f_0$  soit une solution de (E<sub>0</sub>).

Alors  $(f - f_0)'(x) = 2(f - f_0)(x)$ , pour tout réel  $x$ .

D'où :  $f'(x) = 2f(x) + f_0'(x) - 2f_0(x) = 2f(x) + \cos(x)$ , car  $f_0$  est une solution de (E).

Par conséquent,  $f$  est une solution de (E).

• **Conclusion** :  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $f - f_0$  est solution de (E<sub>0</sub>).

d) D'après les questions 2) b) et 2) c), on déduit que  $(f - f_0)(x) = C e^{2x}$ , c'est-à-dire

$$f(x) = f_0(x) + C e^{2x}.$$

Par conséquent, **les solutions de (E) sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbf{R}$  par**

$$f(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) + C e^{2x}.$$

e) Comme  $k$  est une solution de (E), alors  $k(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) + C e^{2x}$ .

$$\text{Or } k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ alors : } -\frac{2}{5} + C e^{\pi} = 0 \text{ ou encore } C = \frac{\frac{2}{5}}{e^{\pi}} = \frac{2}{5} e^{-\pi}.$$

$$\text{Par conséquent, } k(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) + \frac{2}{5} e^{2x-\pi}.$$

### **Exercice 3** (Pondichéry, avril 2004)

#### **Partie A : étude d'une fonction auxiliaire**

1) a) •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  (règle du monôme de plus haut degré).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  (limite d'une fonction composée).

Par produit de limites,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} = +\infty$ .

Par suite,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$  (par somme de limites).

•  $\varphi(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - 1$ . Or pour tout entier naturel  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  ; alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

(par quotient de limites).

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - 1 \right] = -1$  (par somme de limites).

Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1$ .

b) On remarque que  $\varphi = u e^v - 1$  avec  $u(x) = x^2 + x + 1$  et  $v(x) = -x$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  étant dérivable sur  $\mathbf{R}$ , alors  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

D'où :  $\varphi' = u'e^v + uv'e^v$  avec  $u'(x) = 2x+1$  et  $v'(x) = -1$ .

Alors :  $\varphi'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)(-1)e^{-x} = (-x^2+x)e^{-x} = x(-x+1)e^{-x}$ , pour tout réel  $x$ .

Comme  $e^{-x} > 0$ , alors le signe de  $\varphi'(x)$  dépend de celui de  $x(-x+1)$ .

Or  $x(-x+1)$  est un trinôme du second degré ayant pour racines 0 et 1. On en déduit donc le tableau de variations de  $\varphi$  :

$x$	$-\infty$	0	1	$\alpha$	$+\infty$
$\varphi'$	-	0	+	0	-
$\varphi$	$+\infty$			$3/e-1$	
		↘	↗	↘	
		0		0	-1

2) D'après le tableau de variations, on en déduit que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet deux solutions : 0 et  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

En utilisant la calculatrice, on obtient l'encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$  :  $1,79 < \alpha < 1,8$

3) D'après le tableau de variations précédent et la question 2), on obtient :

$x$	$-\infty$	0		$\alpha$	$+\infty$
$\varphi(x)$	+	0	+	0	-

### Partie B : Etude de la position relative de deux courbes

1) •  $f(0) = 1$  et  $g(0) = 1$ . Donc  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  passent par le point A de coordonnées  $(0; 1)$ .

• Pour qu'elles aient la même tangente, les fonctions qu'elles représentent, doivent avoir en plus le même nombre dérivé en 0.

$f'(x) = 2e^{-x} + (2x+1)(-1)e^{-x} = (-2x+1)e^{-x}$ . Alors  $f'(0) = 1$ .

$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ . Alors  $g'(0) = 1$ .

Par conséquent,  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  admettent la même tangente en A.

2) a) Soit un réel  $x$ .

$$f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1) \left[ e^{-x} - \frac{1}{x^2+x+1} \right] = (2x+1) \left[ \frac{(x^2+x+1)e^{-x} - 1}{x^2+x+1} \right]$$

Donc, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$  où  $\varphi$  est la fonction étudiée dans la partie A.

b) Le discriminant du trinôme  $x^2 + x + 1$  étant négatif, alors le signe de  $x^2 + x + 1$  est celui du coefficient du monôme  $x^2$ . D'où :  $x^2 + x + 1 > 0$  pour tout réel  $x$ .  
Le signe de  $f(x) - g(x)$  dépend donc de celui de  $(2x+1)\varphi(x)$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+	+
$\varphi(x)$	+	+	0	0	-
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-

On en déduit que :

$\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent aux points d'abscisses  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$  et  $\alpha$ .

$\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$  sur  $\left[-\frac{1}{2}; \alpha\right]$ .

$\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $\mathcal{C}_g$  sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\alpha; +\infty\right[$ .

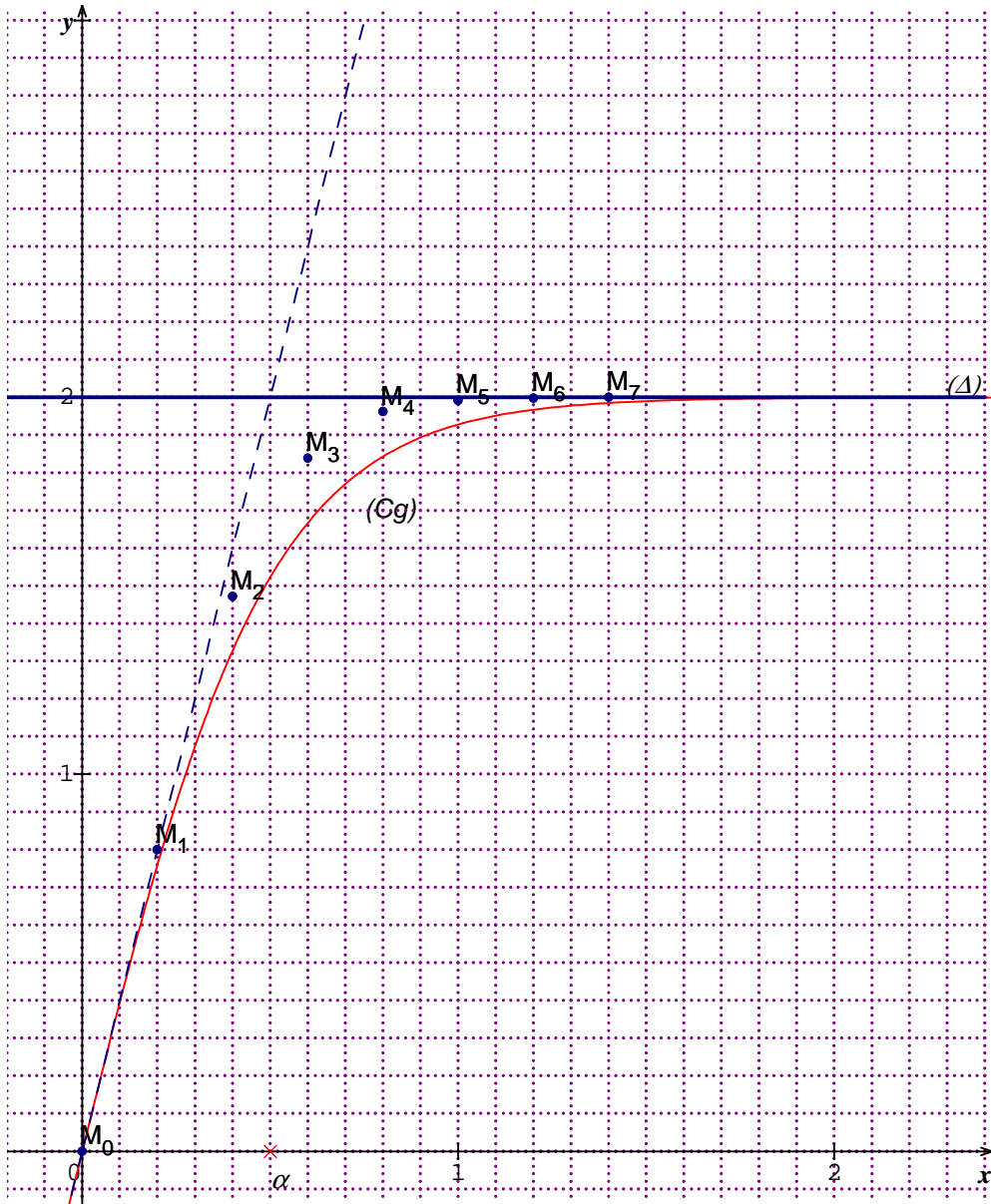
**Exercice 4** (Amérique du Nord, juin 2006)

**Partie A : étude d'une suite**

1) a)

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_n$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
$y_n$	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

b)



c) Il semble que la suite  $(y_n)$  soit croissante et qu'elle converge vers 2.

2) a) La fonction  $p$  est continue et dérivable sur  $\mathbf{R}$ , donc sur  $[0; 2]$ , en tant que fonction polynôme. Soit un réel  $x$  de  $[0; 2]$ .  $p'(x) = -0,4x + 1$ ; alors  $p'(x) = 0$  lorsque  $x = 2,5$ . On en déduit que sur  $[0; 2]$ ,  $p'(x) > 0$ , et ainsi, que la fonction  $p$  est strictement croissante sur  $[0; 2]$ .

Comme fonction  $p$  est continue et strictement croissante, alors elle réalise une bijection de  $[0; 2]$  sur  $[p(0); p(2)] = [0,8; 2]$ . Or  $[0,8; 2] \subset [0; 2]$ ; donc, **si  $x \in [0; 2]$  alors  $p(x) \in [0; 2]$** .

b) Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $0 \leq y_n \leq 2$  »

→ Comme  $y_0 = 0$ , alors on a  $\mathcal{P}(0)$  qui est vraie.

→ Soit  $n$  un entier naturel. Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors :  $0 \leq y_n \leq 2$ .

Comme la fonction  $p$  est strictement croissante sur  $[0; 2]$ , alors  $p(0) \leq p(y_n) \leq p(2)$ , c'est-à-dire  $0 \leq y_{n+1} \leq 2$  d'après la question 2) a). On en déduit que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On a alors prouvé :

$$\mathcal{P}(0) \text{ et pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout  $n$  entier naturel,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie

C'est-à-dire : **pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $0 \leq y_n \leq 2$ .**

$$c) y_{n+1} - y_n = -0,2y_n^2 + 0,8 = -0,2(y_n^2 - 4) = -0,2(y_n - 2)(y_n + 2).$$

Or  $0 \leq y_n \leq 2$  pour tout entier naturel  $n$ , d'où  $-0,2(y_n - 2)(y_n + 2) \geq 0$ .

Donc  $y_{n+1} - y_n \geq 0$  pour tout entier naturel  $n$ .

Par conséquent, **la suite  $(y_n)$  est croissante.**

d) Comme la suite  $(y_n)$  est croissante et majorée par 2, alors **elle est convergente.**

### Partie B: étude d'une fonction

$$1) \triangleright g(0) = 2 \frac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 0 \text{ d'où } g \text{ vérifie la condition (1).}$$

$$\triangleright g = 2 \times \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) = e^{4x} - 1 \text{ et } v(x) = e^{4x} + 1.$$

$$\text{Alors } g' = 2 \times \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(x) = 4e^{4x} \text{ et } v'(x) = 4e^{4x}.$$

$$\text{D'où } g'(x) = 2 \times \frac{4e^{4x}(e^{4x} + 1) - (e^{4x} - 1) \times 4e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}. \text{ Or :}$$

$$4 - [g(x)]^2 = 4 - 4 \times \frac{(e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4 \times \frac{(e^{4x} + 1)^2 - (e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4 \times \frac{(e^{4x} + 1 + e^{4x} - 1)(e^{4x} + 1 - e^{4x} + 1)}{(e^{4x} + 1)^2}$$

$$\text{c'est-à-dire } 4 - [g(x)]^2 = 4 \times \frac{2e^{4x} \times 2}{(e^{4x} + 1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

Donc pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,  $g'(x) = 4 - [g(x)]^2$ , et ainsi  **$g$  vérifie la condition (2).**

$$2) a) g(x) = 2 \times \frac{e^{4x}(1 - e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = 2 \times \frac{(1 - e^{-4x})}{(1 + e^{-4x})}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x) = -\infty ; \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} = 0. \text{ On en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2.$$

Par conséquent,  **$(C_g)$  admet une asymptote  $\Delta$  d'équation  $y = 2$ .**

Remarque :  $(C_g)$  n'admet pas d'asymptote verticale car la dénominateur  $e^{4x} + 1$  ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$ .

b) D'après la question 1) de la partie B,  $g'(x) = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$ .

Or  $(e^{4x} + 1)^2 > 0$  et  $16e^{4x} > 0$  pour tout réel  $x$  de  $[0; +\infty[$ , alors  $g'(x) > 0$ .

Par conséquent, **la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .**

c) La tangente à  $(C_g)$  à l'origine a une équation de la forme  $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$ .

Or  $g'(0) = \frac{16e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{16}{4} = 4$  et  $g(0) = 2 \frac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 0$ .

Par conséquent, **la tangente à  $(C_g)$  à l'origine a une équation de la forme  $y = 4x$ .**

Soit  $\alpha$  l'abscisse du point d'intersection de  $\Delta$  et de la tangente à  $(C_g)$  à l'origine.

On est amené à résoudre l'équation  $4x = 2$  ; d'où  $x = \frac{1}{2}$ .

Donc **l'abscisse du point d'intersection de  $\Delta$  et de la tangente à  $(C_g)$  à l'origine est  $\alpha = 0,5$ .**

d) Voir graphique ci-dessus.