

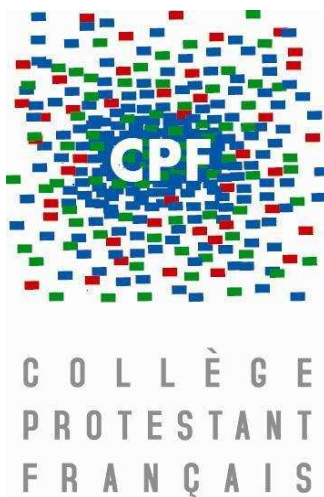
DEVOIR COMMUN N° 2

Épreuve de : MATHÉMATIQUES (Obligatoire)

Série : S

Durée : 4 heures

Année scolaire
2009-2010



L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter QUATRE exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, et des constructions des courbes, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (4,5 points)

Cet exercice sera noté entre 0 et 4,5 ; il n'y aura pas de note globale négative.

À chacune des 6 affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX », aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant : 0,75 point par réponse exacte ; - 0,5 point par réponse fausse ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1) f est la fonction définie sur l'ensemble \mathbf{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. (C) est la courbe

représentative de f dans un repère du plan. La tangente à (C) au point d'abscisse 0 est

parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$.

2) Pour tout x de \mathbf{R} , $e^x > 2x$.

3) La suite (u_n) définie par $u_n = e^{-2n}$ est géométrique.

4) Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.

5) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b , tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

6) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$, g ne s'annulant pas :

$$\text{si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$

Exercice 2 (5 points)

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ .

Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c où $a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

- 1) Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ .
- 2) Soit D le point d'affixe $2 + 2i$. Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC) .

Partie B

(On rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$).

À tout point M du plan différent de O , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que

$z' = \frac{20}{z}$ où \bar{z} représente le nombre conjugué de z .

- 1) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
- 2) Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z . On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M .
 - a) Vérifier que $z + \bar{z} = 4$.
 - b) Exprimer $z' + \bar{z}'$ en fonction de z et \bar{z} , et en déduire que $5(z' + \bar{z}') = z'\bar{z}'$.
 - c) En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ .

Placer M' sur la figure.

Exercice 3 (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur

$[0 ; +\infty[$ et satisfait l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y)$.

1) Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement

si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2) Donner la solution générale de l'équation différentielle (H) : $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$.

3) En déduire qu'il existe un réel C tel que pour tout t de $[0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(la notation \exp désigne la fonction exponentielle).

4) La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par

$$f(t) = \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
- Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas. »

On note M l'évènement « l'animal est malade », \bar{M} l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

- Déterminer $p(M)$, $p_M(T)$ et $p_{\bar{M}}(T)$.
- En déduire $p(T)$.
- Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Exercice 4 (8,5 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$.

Soit (C_f) la courbe représentative de f et soit (C_h) celle de la fonction h définie sur

$]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

- 1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que (C_f) a deux asymptotes que l'on déterminera.
- 2) Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f .
- 3) Soit I le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

Déterminer les coordonnées de I .

4) Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.

- a) Étudier les variations de la fonction g .
- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0; 2[$ et $]2; 4[$.

Soit α la solution appartenant à $]2; 4[$, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

5) a) Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que (C_f) et (C_h) se coupent en deux points.

b) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est

$$\text{vraie : } 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

6) Tracer (C_f) et (C_h) .

Partie B

On considère, pour tout n supérieur ou égal à 1, la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1+2\ln x}{x^{2n}}.$$

- 1) Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n .
- 2) Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.
- 3) Déterminer la limite de la suite (x_n) .