DEVOIR COMMUN N° 2		**<u>Année scolaire 2009-2010</u>**
Épreuve de : **MATHÉMATIQUES (Spécialité)**		
Série : **S**	*Durée* : **4 heures**	

CPF

COLLÈGE PROTESTANT FRANÇAIS

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter QUATRE exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, et des constructions des courbes, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

C. Lainé

Exercice 1 : (*4,5 points*)

Cet exercice sera noté entre 0 et 4,5 ; il n'y aura pas de note globale négative.
À chacune des 6 affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX », aucune justification n'est demandée.
Le barème est le suivant : 0,75 point par réponse exacte ; - 0,5 point par réponse fausse ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1) f est la fonction définie sur l'ensemble **R** par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère du plan. La tangente à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.

2) Pour tout x de **R**, $\mathrm{e}^x > 2x$.

3) La suite (u_n) définie par $u_n = \mathrm{e}^{-2n}$ est géométrique.

4) Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b, $\mathrm{e}^{a+b} = \sqrt{\mathrm{e}^{2a} \times \mathrm{e}^{2b}}$.

5) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $2\,\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$.

6) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$, g ne s'annulant pas :

$$\text{si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$

Exercice 2 (5 *points*)

1) On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b) Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à l'ensemble des entiers relatifs **Z**.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2) Démontrer que 227 est un nombre premier.

3) On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) Vérifier que $g\left[f(0)\right] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [\text{modulo } 227]$.

c) En utilisant 1) b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g\left[f(a)\right] = a$.

Que peut-on dire de $f\left[g(a)\right] = a$?

Exercice 3 (7 *points*)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ et satisfait l'équation différentielle (E) : $y' = -\dfrac{1}{20}y(3-\ln y)$.

1) Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\left(f(t)\right)\right]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2) Donner la solution générale de l'équation différentielle (H) : $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$.

3) En déduire qu'il existe un réel C tel que pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle).

4) La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par $f(t) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right)$.

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c) Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas. »
On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1) Déterminer $p(M)$, $p_M(T)$ et $p_{\overline{M}}(T)$.

2) En déduire $p(T)$.

3) Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Exercice 4 (8,5 *points*)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(0\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ par $f\left(x\right)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

Soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f et soit $\left(C_h\right)$ celle de la fonction h définie sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ par $h\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $\left(C_f\right)$ a deux asymptotes que l'on déterminera.

2) Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.

3) Soit $\mathcal{I}$ le point d'intersection de $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses.

Déterminer les coordonnées de $\mathcal{I}$.

4) Pour tout x de $\left]0\ ;\ +\infty\right[$, on pose $g\left(x\right)=1-x+2\ln x$.

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $\left]0\ ;\ 2\right[$ et $\left]2\ ;\ 4\right[$.

Soit α la solution appartenant à $\left]2\ ;\ 4\right[$, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5) a) Montrer que $f(x)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $\left(C_f\right)$ et $\left(C_h\right)$ se coupent en deux points.

b) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie : $0<f\left(x\right)\leq\dfrac{1}{x}$.

6) Tracer $\left(C_f\right)$ et $\left(C_h\right)$.

Partie B

On considère, pour tout n supérieur ou égal à 1, la fonction f, définie sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ par

$f_n\left(x\right)=\dfrac{1+2\ln x}{x^{2n}}$.

1) Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n.

2) Résoudre l'équation $f_n'\left(x\right)=0$. Soit x_n la solution de cette équation.

3) Déterminer la limite de la suite $\left(x_n\right)$.

C. Lainé