| DEVOIR COMMUN N° 3 | | Année scolaire 2009-2010 |
|---|---|---|
| *Épreuve de* : MATHÉMATIQUES (Obligatoire) | | |
| *Série* : S | *Durée* : 4 heures | |

COLLÈGE PROTESTANT FRANÇAIS

**L'utilisation de la calculatrice est autorisée.**

***Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.***

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

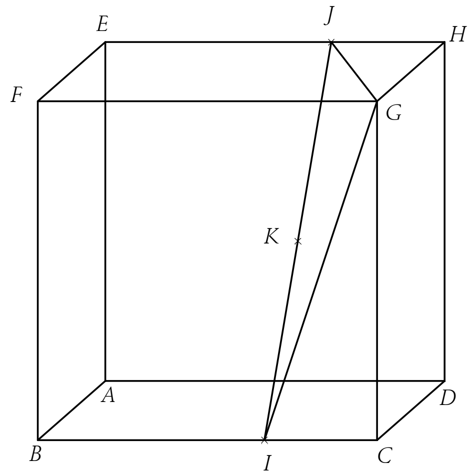
Le candidat doit traiter QUATRE exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, et des constructions des courbes, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

## **Exercice 1 :** (*5 points*)

On donne la propriété suivante : « Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »
Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté le cube *ABCDEFGH* d'arête 1.
On a placé :

- les points $I$ et $J$ tels que $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ ;
- le milieu $K$ de $[IJ]$.

On appelle $P$ le projeté orthogonal de $G$ sur le plan $(FIJ)$.




### PARTIE A

1) Démontrer que le triangle $FIJ$ est isocèle en $F$. En déduire que les droites $(FK)$ et $(IJ)$ sont orthogonales.
On admet que les droites $(GK)$ et $(IJ)$ sont orthogonales.
2) Démontrer que la droite $(IJ)$ est orthogonale au plan $(FGK)$.
3) Démontrer que la droite $(IJ)$ est orthogonale au plan $(FGP)$.
4) a) Montrer que les points $F$, $G$, $K$ et $P$ sont coplanaires.
   b) En déduire que les points $F$, $P$ et $K$ sont alignés.

### PARTIE B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On appelle $N$ le point d'intersection de la droite $(GP)$ et du plan $(ADB)$. On note $(x\ ;y\ ;0)$ les coordonnées du point $N$.
1) Donner les coordonnées des points $F$, $G$, $I$ et $J$.
2) a) Montrer que la droite $(GN)$ est orthogonale aux droites $(FI)$ et $(FJ)$.
   b) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN}\bullet\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}\bullet\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $x$ et $y$.
   c) Déterminer les coordonnées du point $N$.
3) Placer alors le point $P$ sur la figure.

## Exercice 2 (5 *points*)

*Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.*

### Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

a) Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes $z_A$, $z_B$ et $z_C$ trois points $A$, $B$ et $C$.

Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.

b) Soit $z$ un nombre complexe et soit $\theta$ un réel :

$z = \mathrm{e}^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où $k$ est un entier relatif.

<u>*Démonstration de cours*</u> : Démontrer que la rotation $r$ d'angle $\alpha$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ est la transformation du plan qui a tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\alpha}(z - \omega)$.

### Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(O\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

b) Comment construire à la règle et au compas les points $A$, $B$, $C$ et $D$ dans le repère $\left(O\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ ?

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

2) On considère la rotation $r$ de centre $B$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient $E$ et $F$ les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a) Comment construire à la règle et au compas les points $F$ et $E$ dans le repère précèdent ?

b) Donner l'écriture complexe de $r$.

c) Déterminer l'affixe du point $E$.

## **Exercice 3** (4 *points*)

On considère deux urnes $U_1$ et $U_2$.

L'urne $U_1$ contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne $U_2$ contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans $U_1$, on note sa couleur et on la remet dans $U_1$.

Étape $n$ $(n > 2)$ :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans $U_1$, on note sa couleur et on la remet dans $U_1$.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans $U_2$, on note sa couleur et on la remet dans $U_2$.

On note $A_n$ l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne $U_1$ à l'étape $n$ » et $p_n$ sa probabilité.

On a donc $p_1 = 1$.

1) Calculer $p_2$.

2) Montrer que pour tout $n$ entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3) Calculer $p_3$.

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$ entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.

b) Démontrer que la suite $(p_n)$ décroissante.

c) En déduire que la suite $(p_n)$ est convergente vers un réel noté $l$.

d) Justifier que $l$ vérifie l'équation : $l = 0,8l + 0,05$. En déduire la valeur de $l$.

## Exercice 4 (6 *points*)

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur **R** par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4cm).

1) a) Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

b) Construire $\mathscr{C}_f$.

2) a) Calculer $\mathcal{I}_1 = \int_0^1 f(x)dx$.

b) Que représente $\mathcal{I}_1$ ?

### Partie B

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $\mathcal{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} dx$.

1) a) Démontrer que pour tout réel $x$ de $[0 ; 1]$, $x^n \leq x^n \mathrm{e}^{1-x} \leq \mathrm{e}x^n$.

b) Calculer $\mathcal{J}_n = \int_0^1 x^n dx$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\frac{1}{n+1} \leq \mathcal{I}_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\mathcal{I}_{n+1} = (n+1)\mathcal{I}_n - 1$.

3) Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $k_n = n!\mathrm{e} - \mathcal{I}_n$.

a) Exprimer $k_{n+1}$ en fonction de $k_n$.

b) Calculer $k_1$. En déduire, par récurrence que $k_n$ est un entier naturel pour tout entier naturel $n$ non nul.

c) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, le nombre $n!\mathrm{e} = k_n + \mathcal{I}_n$ n'est pas un entier naturel.