

CORRECTION DU DEVOIR COMMUN N° 3

Géométrie dans l'espace, nombres complexes, probabilités, suites, fonction exponentielle et calcul intégral

Le 17 avril 2010

Exercice 1 (Polynésie, septembre 2008)

PARTIE A

1) Dans les triangles FEJ et BIF rectangles respectivement en E et en B , d'après le théorème de Pythagore, on obtient :

$$FJ^2 = FE^2 + EJ^2 = FE^2 + \left(\frac{2}{3}EH\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9} ; \text{ par suite : } FJ = \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$FI^2 = BF^2 + BI^2 = BF^2 + \left(\frac{2}{3}BC\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9} ; \text{ par suite : } FI = \sqrt{\frac{13}{9}}$$

On en déduit que **le triangle FIJ est isocèle en F .**

Comme K est le milieu de $[IJ]$, alors la droite (FK) , médiane du triangle FIJ , est aussi une médiatrice de $[IJ]$. Par conséquent, **les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.**

2) Comme (IJ) est orthogonale à deux droites sécantes (FK) et (GK) du plan (FGK) , alors **la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK) .**

3) On sait que P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) , alors la droite (PG) est orthogonale à ce plan et en particulier à toute droite de ce plan. On en déduit que (PG) est orthogonale à (IJ) .

D'après la question 2), la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK) et (FG) est incluse dans ce plan. D'où (IJ) est orthogonale à (FG) .

Comme (PG) et (FG) sont deux droites sécantes du plan (FGP) , alors on peut dire que **la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP) .**

4) a) D'après les questions 2) et 3), on a le fait que (IJ) est orthogonale aux plans (FGP) et (FGK) qui sont sécants au point F . Or il n'existe qu'un plan contenant un point et orthogonal à une droite donnée. Par conséquent, les plans (FGP) et (FGK) sont confondus. Par suite, **les points F, G, K et P sont coplanaires.**

b) La droite (IJ) est orthogonale aux droites (FP) et (FK) . Or les points F, P et K sont coplanaires, alors les droites (FP) et (FK) sont confondues.

Par conséquent, **les points F, P et K sont alignés.**

PARTIE B

1) $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{AE}$, alors **F a pour coordonnées $(1; 0; 1)$.**

$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}$, alors **G a pour coordonnées $(1; 1; 1)$.**

$\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{BI} = \overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{BC} = \overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}$, alors **I a pour coordonnées $\left(1; \frac{2}{3}; 0\right)$.**

$$\overline{AJ} = \overline{AE} + \overline{EJ} = \overline{AE} + \frac{2}{3}\overline{EH} = \frac{2}{3}\overline{AD} + \overline{AE}, \text{ alors } J \text{ a pour coordonnées } \left(0; \frac{2}{3}; 1 \right).$$

2) a) P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) , alors la droite (GP) est orthogonale au plan (FIJ) . Or le point N appartient à la droite (GP) , d'où la droite (GN) est orthogonale au plan (FIJ) .

Comme les droites (FI) et (FJ) sont deux droites sécantes du plan (FIJ) , on en déduit que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) .

$$b) \overline{GN} \cdot \overline{FI} = (x-1) \times (1-1) + (y-1) \times \left(\frac{2}{3} - 0 \right) + (0-1) \times (0-1) = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}.$$

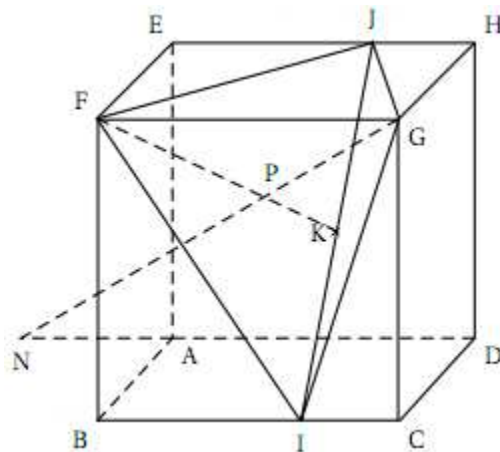
$$\overline{GN} \cdot \overline{FJ} = (x-1) \times (0-1) + (y-1) \times \left(\frac{2}{3} - 0 \right) + (0-1) \times (1-1) = -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}.$$

c) D'après les questions 2) a) et 2) b), on est amené à résoudre le système
$$\begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \\ -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \\ -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, N a pour coordonnées $\left(0; -\frac{1}{2}; 0 \right)$.

3)



Exercice 2 (Pondichéry, avril 2008)

Partie A

Soit le point M' d'affixe z' image du point M d'affixe z par la rotation r d'angle α et de

centre Ω d'affixe ω . Alors
$$\begin{cases} \overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}, \text{ ou encore } \begin{cases} \frac{\overline{\Omega M'}}{\overline{\Omega M}} = 1 \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}.$$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \alpha \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} \left| \frac{z_{M'} - z_{\Omega}}{z_M - z_{\Omega}} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_{M'} - z_{\Omega}}{z_M - z_{\Omega}}\right) = \alpha \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \frac{z_{M'} - z_{\Omega}}{z_M - z_{\Omega}} = 1 \times e^{i\alpha}.$$

Par conséquent, la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

$$1 \text{ a) } z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \quad . \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$z_C = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad . \quad z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

b) Comme les affixes des points A , B , C et D ont le même module 2, alors A , B , C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Comme $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}$, alors B un sommet d'un triangle équilatéral indirect de côté 2.

Comme $\arg(z_D) = \pi + \arg(z_B)$, alors D est le symétrique de B par rapport à O .

Comme $\arg(z_C) = \frac{\pi}{6}$, alors le triangle OBH est un triangle équilatéral où H est le point d'affixe $2i$.

Comme $\arg(z_A) = \pi + \arg(z_C)$, alors A est le symétrique de C par rapport à O .

c) Comme O est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$ d'après la question précédente, alors $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, $[AC]$ et $[BD]$ ont la même longueur ; d'où $ABCD$ est un rectangle.

$$(\overline{OC}, \overline{OB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) (2\pi) = \arg(z_B) - \arg(z_C) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} (2\pi).$$

Par conséquent, $ABCD$ est un carré.

2) a) $E = r(A)$ et $F = r(C)$, alors les triangles BEA et BCF sont équilatéraux.

On construit les deux cercles de centres A et B , et de rayon AB . E est un des points d'intersection.

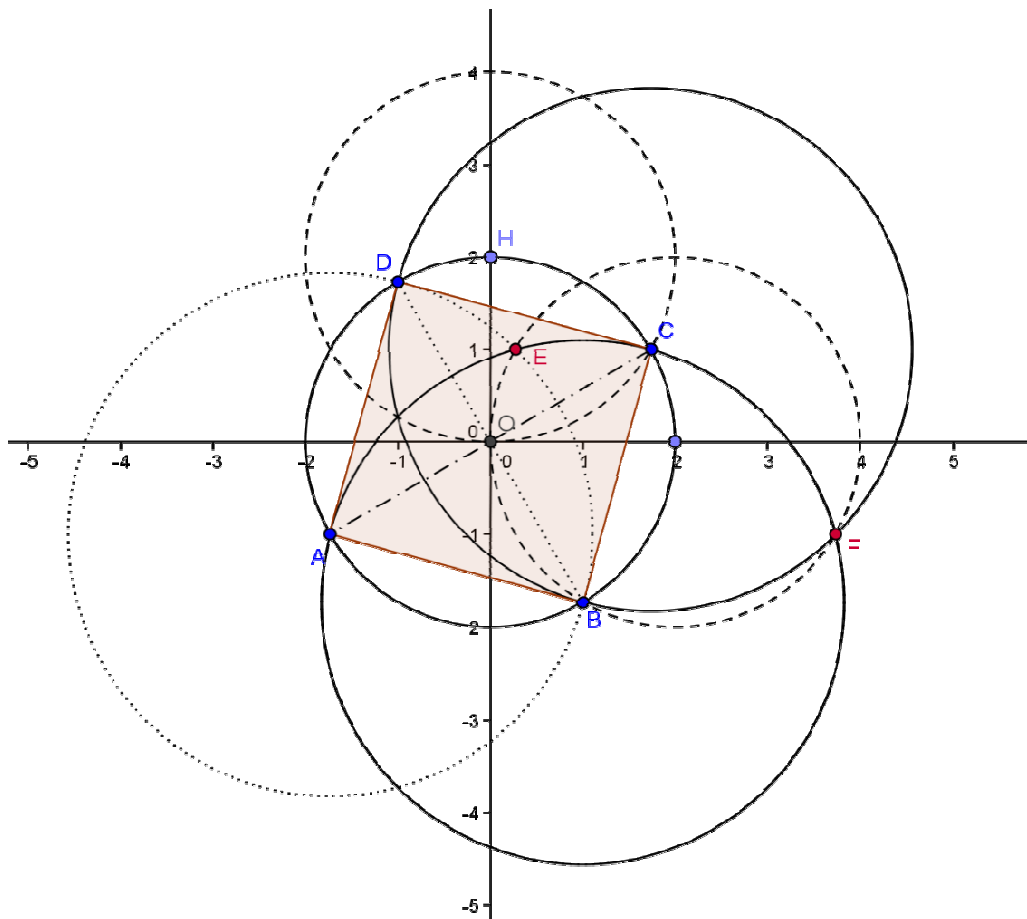
On construit les deux cercles de centres C et B , et de rayon CB . F est un des points d'intersection.

$$b) \text{ L'écriture complexe de } r \text{ est : } z' - 1 + i\sqrt{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - 1 + i\sqrt{3}).$$

c) Comme $E = r(A)$, alors $z_E - 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_A - 1 + i\sqrt{3})$. D'où :

$$z_E = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i - 1 + i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } z_E = 2 - \sqrt{3} + i.$$



Exercice 3 (Liban, juin 2007)

1) Si le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape 2, c'est que l'on a tiré une boule blanche à l'étape 1.

Or il y a 17 boules blanches parmi les 20 de l'urne U_1 .

Par conséquent, $p_2 = \frac{17}{20}$.

2) Soit B_n l'événement : « la boule tirée à l'étape n est blanche ».

Si $n=1$, on a : $0,8p_1 + 0,05 = 0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} = p_2$.

Si $n \geq 2$: on peut construire l'arbre pondéré suivant (voir page suivante).

B_{n-1} et $\overline{B_{n-1}}$ forment une partition de l'univers des tirages à l'étape $n-1$; d'après la formule des probabilités totales, on obtient :

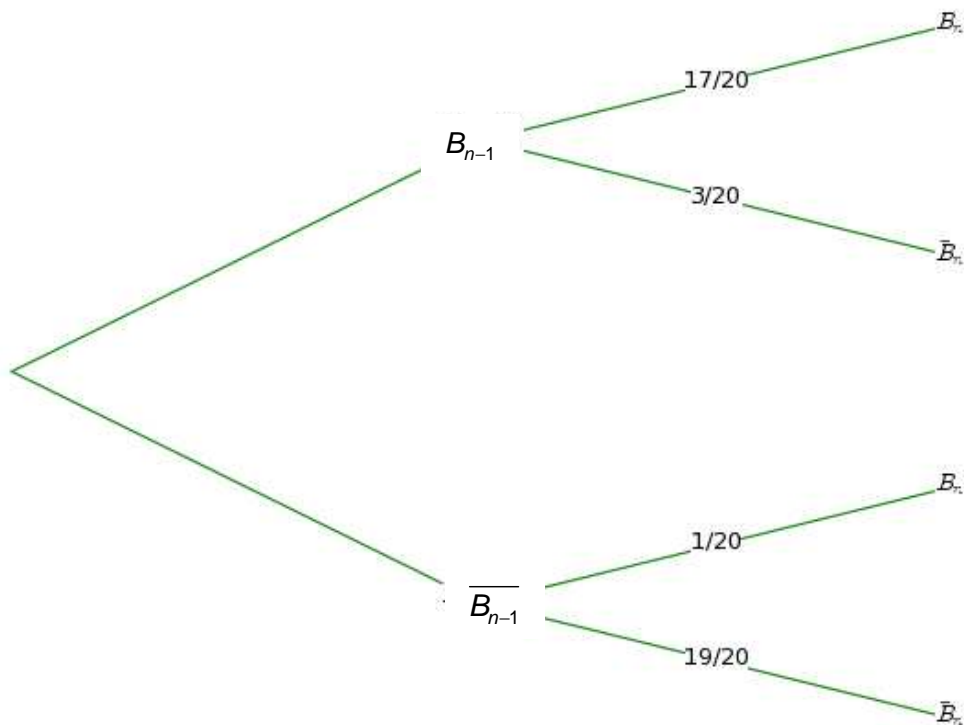
$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(B_n) = p_{B_{n-1}}(B_n) \times p(B_{n-1}) + p_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) \times p(\overline{B_{n-1}}).$$

Or $p(B_{n-1}) = p(A_n) = p_n$ et $p(\overline{B_{n-1}}) = 1 - p_n$, $p_{B_{n-1}}(B_n) = \frac{17}{20}$ et $p_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) = \frac{1}{20}$.

D'où : $p_{n+1} = \frac{17}{20} \times p_n + \frac{1}{20} \times (1 - p_n) = \frac{16}{20} p_n + \frac{1}{20} = 0,8p_n + 0,05$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.**

3) $p_3 = 0,8p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,85 + 0,05 = 0,73$. Donc **$p_3 = 0,73$** .



4) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de \mathbf{N}^* , $p_n > 0,25$ »

→ Comme $p_1 = 1$, alors on a $\mathcal{P}(1)$ qui est vraie.

→ Montrons que pour tout $n \geq 1$, on a : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $p_n > 0,25$.

D'où $0,8p_n + 0,05 \geq 0,8 \times 0,25 + 0,05$ car la fonction $x \mapsto 0,8x + 0,05$ est strictement croissante sur $]0,25 ; +\infty[$, c'est-à-dire $p_{n+1} > 0,25$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(1)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n de \mathbf{N}^* , $p_n > 0,25$.**

b) $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05 = -0,2(p_n - 0,25)$, pour tout entier naturel n non nul.

Or, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0,25$, c'est-à-dire $p_n - 0,25 > 0$. Donc, $p_{n+1} - p_n < 0$, pour tout entier naturel n non nul.

Par conséquent, **la suite (p_n) est décroissante.**

c) Comme la suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,25, alors **elle est convergente vers un réel que l'on notera l .**

d) Comme $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$, par passage aux limites, on obtient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = 0,8 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n + 0,05$, c'est-à-dire $l = 0,8l + 0,05$.

D'où : $l = \frac{0,05}{0,2} = 0,25$. Par conséquent, **la suite (p_n) converge vers 0,25.**

Exercice 4

Partie A

1) a) On remarque que $f = ue^v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 1 - x$.

La fonction v est dérivable sur \mathbf{R} , alors e^v est dérivable sur \mathbf{R} .

La fonction u est dérivable sur \mathbf{R} , donc f est dérivable sur \mathbf{R} .

$$f' = u'e^v + u(e^v)' = u'e^v + uv'e^v \text{ avec } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = -1.$$

D'où $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$, pour tout réel x .

Comme $e^{1-x} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(1-x)$.

Or $1-x=0$ lorsque $x=1$. Donc **la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ (limite d'une fonction composée)

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (par produit de limites).

$f(x) = xe^{1-x} = \frac{xe}{e^x} = e \times \frac{x}{e^x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées).

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (par produit de limites).

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	1	0

b) Voir ci-dessous.

2) a) $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$. Faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u'(x) &= e^{1-x}, & \text{alors : } u(x) &= -e^{1-x} \\ v(x) &= x, & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; 1]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$I_1 = \left[-xe^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx = [-1-0] + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + [(-1) - (-e)].$$

Donc $I_1 = e - 2$.

b) Comme la fonction f est positive sur $[0 ; 1]$, alors I_1 représente l'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

1) a) Soit x un réel de $[0 ; 1]$, alors $0 \leq 1 - x \leq 1$ car la fonction $x \mapsto 1 - x$ est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $[0 ; 1]$, alors on a $1 \leq e^{1-x} \leq e$.

Comme $x^n > 0$ sur $[0 ; 1]$, on obtient $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$.

Par conséquent, **pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$.**

$$b) \mathcal{J}_n = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

c) D'après la question 1) a) de la **partie B** et d'après la propriété du respect de l'ordre par l'intégration, on obtient : $\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 e x^n dx$, ou encore

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx.$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n+1} \leq \mathcal{I}_n \leq \frac{e}{n+1}$.**

2) $\mathcal{I}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$. Faisons une intégration par parties :

$$\text{Posons : } \begin{array}{l} u'(x) = e^{1-x} \\ v(x) = x^{n+1} \end{array} \quad , \text{ alors : } \begin{array}{l} u(x) = -e^{1-x} \\ v'(x) = (n+1)x^n \end{array}$$

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; 1]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$\mathcal{I}_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

Alors **$\mathcal{I}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathcal{I}_n$, pour tout entier naturel n non nul.**

$$3) a) k_{n+1} = (n+1)!e - \mathcal{I}_{n+1} = (n+1) \times n!e - [(n+1)\mathcal{I}_n - 1] = (n+1)[n!e - \mathcal{I}_n] + 1.$$

$$\text{Donc } \mathbf{k_{n+1} = (n+1)k_n + 1.}$$

$$b) \bullet \mathbf{k_1 = k_0 + 1 = 0!e - \mathcal{I}_0 + 1 = e + 1 - \int_0^1 e^{1-x} dx = e + 1 - \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = e + 1 - [(-1) - (-e)] = 2.}$$

• Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « k_n est un entier naturel pour tout entier naturel n non nul »

→ Initialisation : $k_1 = 2 \approx 4,718$ alors on a $\mathcal{P}(1)$ qui est vraie.

→ Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $k_n \in \mathbf{N}$. D'où $(n+1)k_n \in \mathbf{N}$.

Par suite $[(n+1)k_n + 1] \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire que $k_{n+1} \geq 0$. Par suite, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$$\mathcal{P}(1) \text{ et pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n supérieur ou égal à 1, k_n est un entier naturel.**

c) Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

D'après la question 1) c), $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. Or $n+1 \geq 3$, d'où $\frac{e}{n+1} \leq \frac{e}{3} < 1$, et $\frac{1}{n+1} > 0$.

Par suite, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0 < I_n < 1$, c'est-à-dire que I_n n'est pas un entier naturel. Alors $k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, le nombre $n!e = k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.**

