

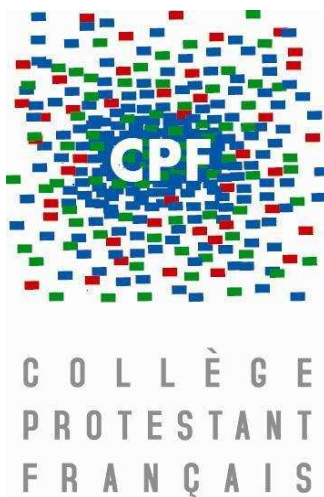
DEVOIR COMMUN N° 3

Épreuve de : MATHÉMATIQUES (Spécialité)

Série : S

Durée : 4 heures

Année scolaire
2009-2010



L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter QUATRE exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, et des constructions des courbes, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points)

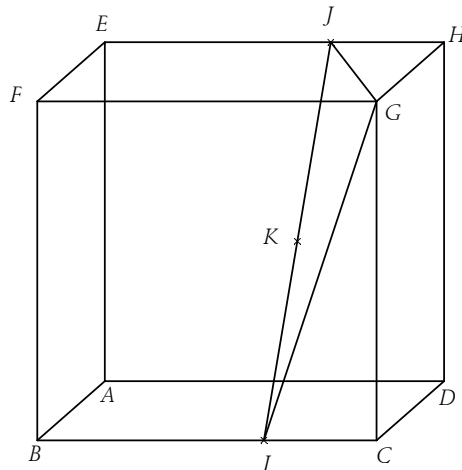
On donne la propriété suivante : « Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On a placé :

- les points I et J tels que $\overline{BI} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ et $\overline{EJ} = \frac{2}{3}\overline{EH}$;
- le milieu K de $[IJ]$.

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) .



PARTIE A

1) Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F . En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK) .

3) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP) .

4) a) Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

b) En déduire que les points F, P et K sont alignés.

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB) . On note $(x; y; 0)$ les coordonnées du point N .

1) Donner les coordonnées des points F, G, I et J .

2) a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) .

b) Exprimer les produits scalaires $\overline{GN} \cdot \overline{FI}$ et $\overline{GN} \cdot \overline{FJ}$ en fonction de x et y .

c) Déterminer les coordonnées du point N .

3) Placer alors le point P sur la figure.

Exercice 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbf{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 2$, $z_C = 4 + 6i$, $z_D = -1 + i$ et $z_E = -3 + 3i$.

- 1) Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
- 2) Déterminer la nature du triangle ABC .
- 3) Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.
 - a) Donner l'écriture complexe de f .
 - b) Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
 - c) Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f .
 - d) En déduire la nature du triangle DAE .

4) On désigne par Γ_1 le cercle de diamètre $[AB]$ et par Γ_2 le cercle de diamètre $[AD]$.

On note M le second point d'intersection du cercle Γ_1 et de la droite (BC) , et N le second point d'intersection du cercle Γ_2 et de la droite (AE) .

- a) Déterminer l'image de M par la similitude f .
- b) En déduire la nature du triangle ΩMN .
- c) Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

Exercice 3 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .

Étape n ($n > 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 , on note sa couleur et on la remet dans U_2 .

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

On a donc $p_1 = 1$.

1) Calculer p_2 .

2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3) Calculer p_3 .

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.

b) Démontrer que la suite (p_n) décroissante.

c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l .

d) Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0,8l + 0,05$. En déduire la valeur de l .

Exercice 4 (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4cm).

1) a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Construire \mathcal{C}_f .

2) a) Calculer $\mathcal{I}_1 = \int_0^1 f(x) dx$.

b) Que représente \mathcal{I}_1 ?

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathcal{I}_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1) a) Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.

b) Calculer $\mathcal{J}_n = \int_0^1 x^n dx$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n+1} \leq \mathcal{I}_n \leq \frac{e}{n+1}$.

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathcal{I}_{n+1} = (n+1)\mathcal{I}_n - 1.$$

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $k_n = n!e - \mathcal{I}_n$.

a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n .

b) Calculer k_1 . En déduire, par récurrence que k_n est un entier naturel pour tout entier naturel n non nul.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, le nombre $n!e = k_n + \mathcal{I}_n$ n'est pas un entier naturel.