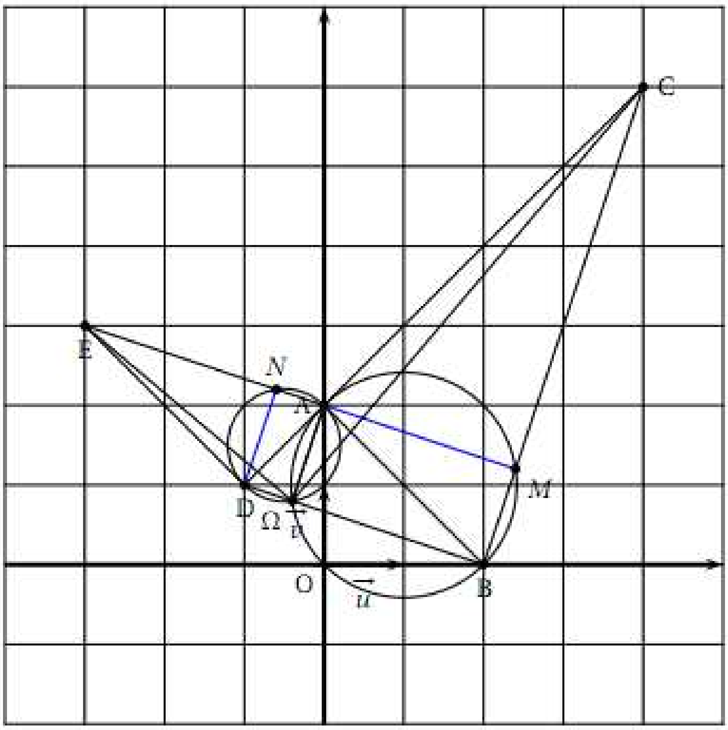
Partie A : Restitution organisée de connaissances

Partie B

1.



2. $\overrightarrow{AB}\,(2\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(4\ ;\ 4)$; donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8-8=0$; les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, donc ABC est un triangle rectangle en A.

3. **a.** On a vu que l'écriture complexe de l'unique similitude f est $z' = az+b$.

Donc $\left\{\begin{array}{lll} \text{D} & = & f(\text{A}) \\ \text{A} & = & f(\text{B})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} -1+\text{i} & = & 2a\text{i}+b \\ 2\text{i} & = & 2a+b\ (2)\end{array}\right. \Rightarrow$

$1+\text{i} = 2a(1-\text{i}) \iff a = \dfrac{1}{2}\dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\text{i})^2}{1+1} = \dfrac{1}{2}\text{i}.$

Il en résulte avec l'équation (2) que $b = 2\text{i} - 2\dfrac{1}{2}\text{i} = \text{i}$.

L'écriture complexe de f est donc :

$$z' = \frac{1}{2}\text{i}z+\text{i}.$$

b. Cherchons le point invariant $\Omega(\omega)$ de cette similitude :

$\omega = \dfrac{1}{2}(\text{i})\omega+\text{i} \iff 2\omega = \omega\text{i}+2\text{i} \iff \omega(2-\text{i}) = 2\text{i} \iff \omega = \dfrac{2\text{i}}{2-\text{i}} = \dfrac{2\text{i}(2+\text{i})}{4+1} = \dfrac{2}{5}(-1+2\text{i}).$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{lll} z' & = & \dfrac{1}{2}\text{i}z+\text{i} \\ \dfrac{2}{5}(-1+2\text{i}) & = & \dfrac{1}{2}\text{i}\left(\dfrac{2}{5}(-1+2\text{i})\right)+\text{i}\end{array}\right. \Rightarrow z' - \frac{2}{5}(-1+2\text{i}) = \frac{1}{2}\text{i}\left(z-\frac{2}{5}(-1+2\text{i})\right).$$

Conclusion : le rapport de cette similitude est égale à : $\left|\dfrac{1}{2}\text{i}\right| = \dfrac{1}{2}$ et son angle est égal à $\arg\left(\dfrac{1}{2}\text{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

c. On a déjà $D = f(A)$ et $C = f(B)$. Cherchons $f(C)$; $z_{f(C)} = \frac{1}{2}i(4+6i)+i = (2i-3)+i = -3+3i$ qui est bien l'affixe de E.

Donc le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

d. Par la similitude les angles sont conservés, donc le triangle DAE est rectangle en A et les dimensions multipliées par le rapport, donc ici divisées par 2.

4. **a.** L'image par f du cercle (Γ_1) de diamètre [AB] est le cercle de diamètre $[f(A)f(B)]$, donc de diamètre [DA] soit le cercle (Γ_2).

L'image de la droite (BC) est la droite (AE).

Donc M a pour image par f le point commun à (Γ_2) et à (AE) soit le point N.

b. On en déduit que $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}\right) = \frac{\pi}{2}$: le triangle ΩMN est donc rectangle en Ω.

c. M appartient au demi-cercle de diamètre [AB] : le triangle ABM est donc rectangle en M ; [AM] est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Considérons le rapport $\frac{MB}{MC}$; comme dans la similtude toutes les longueurs sont divisées par 2, la quotient des images à savoir $\frac{NA}{NE}$ est inchangé. Donc

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{NE} \iff MB \times NE = MC \times NA$$

Source : site de l'APMEP