

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Suites et démonstration par récurrence

Le 25 septembre 2009

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (4 points)

Répondre par VRAI ou FAUX aux questions suivantes en *justifiant*.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout n de \mathbf{N} , $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

On définit les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et

$$w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

- 1) La suite (v_n) est arithmétique.
- 2) La suite (w_n) est constante.
- 3) Pour tout n de \mathbf{N} , on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
- 4) La suite (u_n) n'a pas de limite finie.

Exercice 2 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- 1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.
b) En déduire que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$.
c) En déduire la limite de (u_n) .
- 2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 4u_n - 8n + 24$, pour tout entier naturel n .
a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
c) Vérifier que pour tout entier naturel n , $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
d) En déduire l'expression de $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

- 1) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit une suite de terme général u_n . Que signifie : « la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ » ?

2) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2 + 2}{n}$ pour $n \geq 1$.

- a) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]10 ; +\infty[$.
- b) Soit A un réel aussi grand que l'on veut (on peut supposer $A \geq 10$) ; montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , à déterminer en fonction de A , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A ; +\infty[$.
- c) En déduire à l'aide du 1) la limite de la suite (u_n) .
- d) Donner une méthode pratique permettant d'obtenir cette limite sans avoir recours à la définition.