

DEVOIR SURVEILLÉ N° 11

**Probabilités conditionnelles, loi binomiale
et lois continues**

Le 14 mai 2010

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées. Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE. Pour chaque question, il est compté 1 point si les deux réponses sont exactes, 0,5 point pour une réponse exacte et une absence de réponse et 0 point sinon.

| Question A | Proposition 1 | Proposition 2 |
|---|--|--|
| <p>Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».</p> | <p>La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.</p> | <p>La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.</p> |
| Question B | Proposition 3 | Proposition 4 |
| <p>Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que : A et B sont indépendants ; $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$.</p> | <p>$P(B) = \frac{7}{12}$</p> | <p>$P(\overline{A \cup C}) = \frac{2}{5}$, $\overline{A \cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A \cup C$.</p> |
| Question C | Proposition 5 | Proposition 6 |
| <p>Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0 ; 1[$.</p> | <p>Si $P(X = 1)$ est égale à $8P(X = 0)$, alors $p = \frac{2}{3}$.</p> | <p>Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X = 1)$ est égale à $P(X = 0)$.</p> |
| Question D | Proposition 7 | Proposition 8 |
| <p>La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0 ; +\infty[$</p> | <p>La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.</p> | <p>Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.</p> |

Exercice 2 (4 points)

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A , B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « BBAAC » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

- 1) a) Combien y-a-t'il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?
b) On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des événements suivants :
 E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
 F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
 G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « BACAB » est un palindrome).
- 2) Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.
 - a) Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
 - b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève ne fournisse que des réponses fausses.

Exercice 3 (5 points)

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

- 1) Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
 - a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
 - b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3} .
- 2) Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} .
- 3) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .
 - a) Montrer que $P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.
 - b) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ .