CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 11

Probabilités conditionnelles, loi binomiale et lois continues	***Le 14 mai 2010***

Exercice 1 *(Polynésie, septembre 2009)*

● **Question A**

a) On tire deux boules au hasard simultanément ; il y a donc $\binom{7}{2}$, c'est-à-dire 21, tirages possibles. L'événement A est réalisé lorsqu'on tire deux boules noires ou deux boules rouges. Or il y a $\binom{4}{2}=6$ possibilités de tirer deux boules noires et $\binom{3}{2}=3$ possibilités de tirer deux boules rouges. Par suite, $p(A)=\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$. **La proposition 1 est donc vraie**.

b) L'événement B est réalisé lorsqu'on tire une boule noire et une boule rouge. Or il y a $\binom{4}{1}=4$ possibilités de tirer une boule noire et $\binom{3}{1}=3$ possibilités de tirer une boule rouge. Par suite, $p(B)=\frac{4\times 3}{21}=\frac{4}{7}$. **La proposition 2 est donc fausse**.

● **Question B**

a) Comme A et B sont indépendants, alors $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$. Par suite,
$P(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A)\times p(B)=\frac{3}{4}$.

Donc $p(B)\left[1-p(A)\right]=\frac{3}{4}-p(A)$, c'est-à-dire $p(B)=\dfrac{\frac{3}{4}-p(A)}{1-p(A)}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{5}}=\frac{7}{12}$.

La proposition 3 est donc vraie.

b) $P\left(\overline{A\cup C}\right)=1-P(A\cup C)=1-\left(P(A)+P(C)-P(A\cap C)\right)=1-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$.

Donc $P\left(\overline{A\cup C}\right)=\frac{10-4-5+1}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. **La proposition 4 est donc fausse**.

● **Question C**

D'après l'énoncé, pour tout entier k compris entre 0 et 4, $P(X=k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k}$.

a) On en déduit que :
$P(X=1)=8P(X=0)$ équivaut à $4p(1-p)^3=8(1-p)^4$, c'est-à-dire à $p=2(1-p)$.
Alors $3p=2$ ou encore $p=\frac{2}{3}$. **La proposition 5 est donc vraie**.

b) Si $p=\frac{1}{5}$ alors $P(X=1)=4\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{4^4}{5^4}=\left(\frac{4}{5}\right)^4$ et $P(X=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^4$.
La proposition 6 est donc vraie.

● **Question D**

D'après l'énoncé, $P(X \le k) = \int_0^k 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}07x}dx$

a) La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à $\int_0^{10} 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}07x}dx$. Or $\int_0^{10} 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}07x}dx = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}07x}\right]_0^{10} = -\mathrm{e}^{-0{,}7} + 1 \approx 0{,}50$.
La proposition 7 est donc vraie.

b) D'après la loi de durée de vie sans vieillissement, la probabilité que l'appareil fonctionne encore 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 10 ans, est égale à $P(X \ge 10)$.

Or $P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 10) = \mathrm{e}^{-0{,}7} \approx 0{,}50$. **La proposition 8 est donc vraie**.

<u>**Exercice 2**</u> *(Amérique du Sud, novembre 2010)*

1) a) Il y a trois réponses pour chaque lettre. **Il y a donc 3^5, c'est-à-dire 243 mots-réponses possibles à ce questionnaire**.

b) ● Supposons que la réponse exacte soit la première question.
Il y a alors $1\times2\times2\times2\times2 = 2^4$ possibilités que l'événement E se réalise.
Comme il peut avoir 5 chances d'avoir une réponse exacte, alors $card(E) = 5\times2^4$.

Donc $\boldsymbol{p(E)} = \frac{5\times2^4}{3^5} = \boldsymbol{\frac{80}{243}}$.

● Comme le candidat n'a aucune réponse exacte, c'est qu'il a avait deux choix possibles pour chacune des questions. Il y a alors 2^5 possibilités que l'événement F se réalise.

Donc $\boldsymbol{p(F)} = \frac{2^5}{3^5} = \boldsymbol{\frac{32}{243}}$.

● Un palindrome est donc un mot où les trois premières lettres sont quelconques, la quatrième est la même que la seconde et la cinquième est la même que la première.

Il y a donc $3\times3\times3\times1\times1 = 3^3$ palindromes possibles. Donc $\boldsymbol{p(G)} = \frac{3^3}{3^5} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$.

2) a) Le fait qu'un élève réponde à un questionnaire est une épreuve de Bernoulli dont l'issue « SUCCÈS » est que l'élève n'a aucune réponse exacte $\left(p = p(F) = \frac{32}{243}\right)$.

Cette expérience est répétée 28 fois de façon indépendante.

Donc **la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$**.

b) La probabilité cherchée est $p(X \le 1)$, c'est-à-dire $p(X = 0) + p(X = 1)$.
D'après la question précédente, pour tout entier k compris entre 0 et 28,

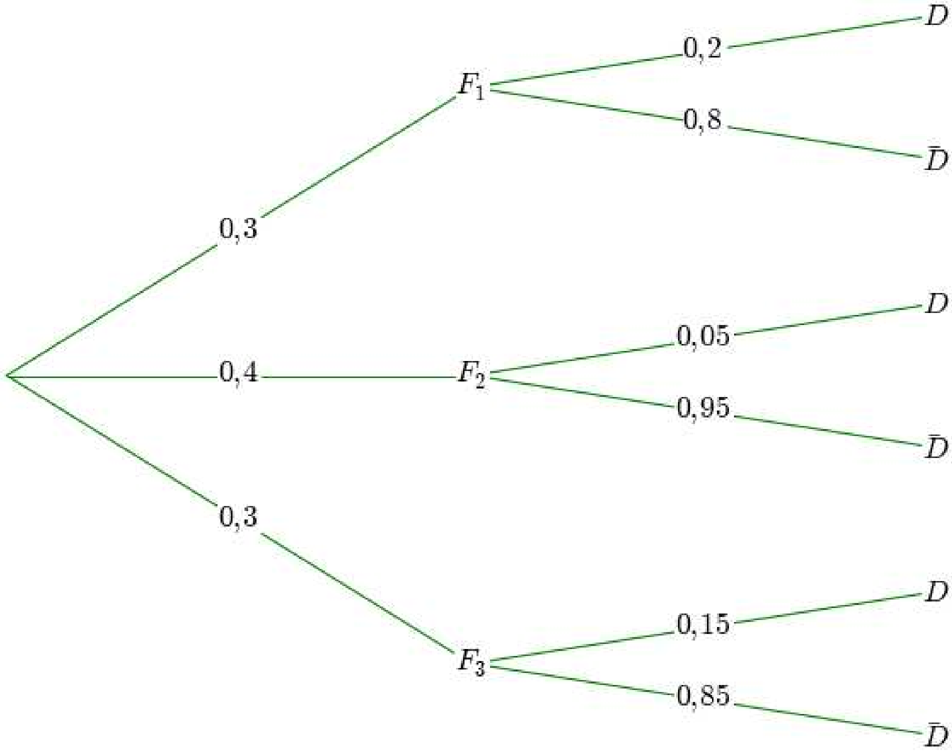
$$P(X = k) = \binom{28}{k}\left(\frac{32}{243}\right)^k\left(1-\frac{32}{243}\right)^{28-k}.$$

D'où $p(X \le 1) = \left(1-\frac{32}{243}\right)^{28} + 28\left(\frac{32}{243}\right)\left(1-\frac{32}{243}\right)^{27} \approx 0{,}10$.

La probabilité qu'au plus un élève ne fournisse que des réponses fausses est égale à environ 0,10.

Exercice 3 *(France, septembre 2009)*

1) a) Soit F_i l'événement « le pneu provient du *i*-ème fournisseur » et D l'événement « le pneu a un défaut ».



D'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{D}\right) &= p\left(F_1 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_2 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_3 \cap \overline{D}\right) \\ &= p(F_1) \times p_{F_1}\left(\overline{D}\right) + p(F_2) \times p_{F_2}\left(\overline{D}\right) + p(F_3) \times p_{F_3}\left(\overline{D}\right) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}85 = 0{,}875 \end{aligned}$$

Donc **la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875**.

b) On recherche $p_{\overline{D}}(F_2)$. Or $p_{\overline{D}}(F_2) = \dfrac{p\left(\overline{D} \cap F_2\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}95}{0{,}875} \approx 0{,}434$.

Sachant que le pneu choisi est sans défaut, la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur est égale à environ 0,434.

2) Le fait que le réparateur choisisse un pneu est une épreuve de Bernoulli dont le « SUCCÈS » est que le pneu présente un défaut $\left(p = p(D) = 1 - p\left(\overline{D}\right) = 0{,}125\right)$.

Cette épreuve est répétée 10 fois de façon indépendante.
Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de pneus présentant un défaut.
Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}125$.

Pour tout entier k compris entre 0 et 10, $P(X = k) = \dbinom{10}{k}(0{,}125)^k (1 - 0{,}125)^{10-k}$.

La probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut est égale à $p(Y \le 1)$, c'est-à-dire $p(Y = 0) + p(Y = 1)$. Or $p(Y \le 1) = (0{,}875)^{10} + 10(0{,}125)(0{,}875)^9 \approx 0{,}639$.
La probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut est égale à 0,639.

3) a) $P(500 \le X \le 1000) = \displaystyle\int_{500}^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000} = -e^{-1000\lambda} + e^{-500\lambda}$.

Donc $\boldsymbol{P(500 \le X \le 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}}$.

b) On résout l'équation $P(500 \leq X \leq 1000) = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4}$, ou encore $e^{-500\lambda} - \left(e^{-500\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Posons $x = e^{-500\lambda}$. Alors l'équation s'écrit $x - x^2 = 0,25$, ou encore $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

On remarque que $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ équivaut à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire à $x = \frac{1}{2}$.

D'où $e^{-500\lambda} = \frac{1}{2}$ équivaut à $-500\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, c'est-à-dire à $\boldsymbol{\lambda = \frac{\ln(2)}{500} \approx 0,0014}$.