CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Suites et démonstration par récurrence	*Le 25 septembre 2009*

Exercice 1

1) $v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+2}-u_{n+1}\right)-\left(u_{n+1}-u_n\right)=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-2u_{n+1}+u_n=-\frac{5}{3}u_{n+1}+\frac{5}{3}u_n=-\frac{5}{3}v_n$.

Or pour que la suite (v_n) soit arithmétique, $v_{n+1}-v_n$ doit être constante pour tout n de **N**. Ce qui n'est pas le cas. Donc c'est **FAUX**.

2) $w_{n+1}-w_n=u_{n+2}+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=0$, pour tout n de **N**. Donc c'est **VRAI**.

3) $\frac{3}{5}\left(w_n-v_n\right)=\frac{3}{5}\left(u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-u_{n+1}+u_n\right)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}u_n=u_n$. Donc c'est **VRAI**.

4) Comme (w_n) est constante, alors $w_n=w_0=u_1+\frac{2}{3}u_0=1+0=1$, pour tout n de **N**.

De plus, d'après 1), $v_{n+1}-v_n=-\frac{5}{3}v_n$; alors $v_{n+1}=-\frac{5}{3}v_n+v_n=-\frac{2}{3}v_n$, pour tout n de **N**.

Par conséquent, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme

$v_0=u_1-u_0=1-0=1$ et de raison $q=-\frac{2}{3}$. On en déduit que $v_n=v_0\times q^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout entier $n.v_1=$

D'après la question 3), on peut écrire que $u_n=\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$, pour tout n de **N**.

Comme $-1<-\frac{2}{3}<0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{5}$.

C'est donc **FAUX**.

Exercice 2

1) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_n\geq 0$ »

→ *Initialisation* : $u_1=\frac{1}{2}u_0+0-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$; $u_2=\frac{1}{2}u_1+1-1=-\frac{1}{4}$;

$u_3=\frac{1}{2}u_2+2-1=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}$, alors on a $\mathscr{P}(3)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n\geq 3$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n\geq 0$. D'où $\frac{1}{2}u_n\geq 0$.

De plus, $n\geq 3$, alors $n-1\geq 2$. En additionnant membre à membre les deux inégalités, on en déduit que $\frac{1}{2}u_n+n-1\geq 2$, c'est-à-dire que $u_{n+1}\geq 0$. Par suite, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

→ *Conclusion* : on a alors prouvé :

$\mathscr{P}(3)$ et pour tout n supérieur ou égal à 3, $\mathscr{P}(n)\Rightarrow\mathscr{P}(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 3, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n supérieur ou égal à 3, $u_n \geq 0$**.

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4. Alors $\frac{1}{2}u_n \geq 2$, et par suite $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq 1$.

On en déduit que $\frac{1}{2}u_n + n - 1 \geq n - 1$. Or $n - 1 > n - 2$; par conséquent, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $u_n \geq n - 2$**.

c) En utilisant l'inégalité de la question précédente et sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-2) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

2) a) Soit n un entier naturel.

$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12 = \frac{1}{2}v_n$.

Par conséquent, **(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_0** $= 4u_0 - 8 \times 0 + 24$ **$= 28$**.

b) D'après la question précédente, $v_n = v_0 \times q^n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout entier naturel n.

Or $v_n = 4u_n - 8n + 24$, d'où : $4u_n = v_n + 8n - 24$, ou encore $u_n = \frac{1}{4}v_n + 2n - 6$.

Par conséquent, $\boldsymbol{u_n} = \frac{1}{4} \times 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 \boldsymbol{= 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}$, pour tout entier naturel n.

c) Soit (x_n) la suite géométrique de premier terme $x_0 = 7$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Soit (y_n) la suite arithmétique de premier terme $y_0 = -6$ et de raison 2.

Alors, pour tout entier naturel n, $x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $y_n = -6 + 2n$. On en déduit alors que $x_n + y_n = u_n$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $x_0 = 7$, et (y_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $y_0 = -6$**.

d) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k + \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$, avec

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 14 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \text{ et}$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = \frac{(n+1)(y_0 + y_n)}{2} = \frac{(n+1)(-6 + 2n - 6)}{2} = (n+1)(n-6).$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $S_n = 14 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(n-6)$**.

Exercice 3

1) $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, alors $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$. Comme n est un entier naturel, alors $2n + 3 > 0$. Par conséquent, **la suite (u_n) est strictement croissante**.

2) a) En utilisant la calculatrice, on fait apparaître les premiers termes de cette suite :

n	u_n
0	1
1	4
2	9
3	16
4	25
5	36
6	49
7	64
8	81
9	100
10	121
11	144
12	169
13	196
14	225
15	256
16	289
17	324
18	361

Il semble que, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

b) Démontrons le par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$ »

→ *Initialisation* : $(0+1)^2 = 1 = u_0$, alors on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n = (n+1)^2$.
D'où $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
Par suite, $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

→ *Conclusion* : on a alors prouvé :
$\mathscr{P}(0)$ et pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n + 1)$.
Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie
C'est-à-dire : **pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$** .

Exercice 4

1) **Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice**.

2) a) u_n appartient à $]10\ ;+\infty[$ équivaut à $\dfrac{n^2+2}{n} \geq 10$, c'est-à-dire à $n^2 + 2 \geq 10n$ (car n est positif). Or $n^2 + 2 \geq 10n$ équivaut à $n^2 - 10n + 2 \geq 0$, ou encore à $n \in \left[5+\sqrt{23}\ ;\ +\infty\right[$.
Par conséquent, **à partir du rang $n_0 = 10$, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]10\ ;+\infty[$**.

b) u_n appartient à $]A\ ;+\infty[$ équivaut à $\dfrac{n^2+2}{n} \geq A$, c'est-à-dire à $n^2 - An + 2 \geq 0$ (car n est positif). Or $n^2 - An + 2 \geq 0$ équivaut à $n \in \left[\dfrac{A+\sqrt{A^2-8}}{2}\ ;\ +\infty\right[$ $\left(\sqrt{A^2-8} \text{ existe car } A \geq 10\right)$.

Par conséquent, **à partir du rang $n_0 = E\left(\dfrac{A+\sqrt{A^2-8}}{2}\right)+1$ (E étant la fonction partie entière), tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A\ ;+\infty[$**.

c) D'après le 1) et le 2), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2}{n} = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n} = n\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}\right)=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)=1$ (par somme de limites).
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par produit de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.