DEVOIR SURVEILLÉ N° 2	
Homothéties et dérivation	***Le 16 octobre 2009***

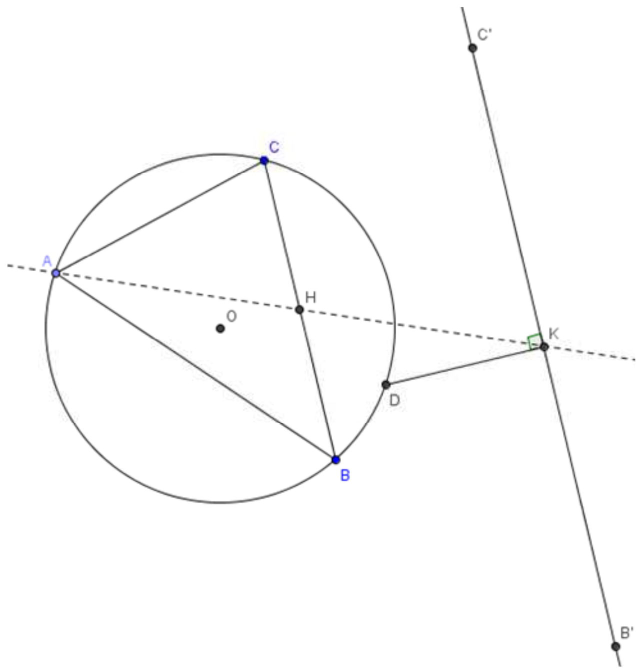
Exercice 1 (5 *points*)

Soient ABC un triangle et (Γ) son cercle circonscrit de centre O.

Soient H le milieu de $[BC]$ et D le point de (Γ) diamétralement opposé à A.

B' est le symétrique de A par rapport à B et C' est le symétrique de A par rapport à C.
Soit K le projeté orthogonal de D sur $[B'C']$.

Le but de l'exercice est de démontrer que K est le milieu de $[B'C']$ et que les points A, H et K sont alignés. Pour cela on considère l'homothétie h de centre A qui transforme B en B'.



1) Quel est le rapport de h ?
2) Déterminer les images par h des points O et C, puis l'image du segment $[BC]$.

3) Soit (Γ') l'image du cercle (Γ) par *h.*

a) Quel est le centre de (Γ') ?

b) Montrer que (Γ') passe par B' et C'.

4) a) Montrer que (DK) est la médiatrice de $[B'C']$.

b) En déduire que $K = h(H)$, puis que les points A, H et K sont alignés.

Exercice 2 (5 *points*)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée.

1) f est définie sur **R** par $f(x) = (x^3 - 2)^5$.

2) g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{(5x+3)^2}$.

3) h est définie sur **R** par $h(x) = (x-2)^3(x+1)$.

4) m est définie sur **R** par $m(t)=\cos(1-2t)$.

Exercice 3 (5 *points*)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+6x}$.

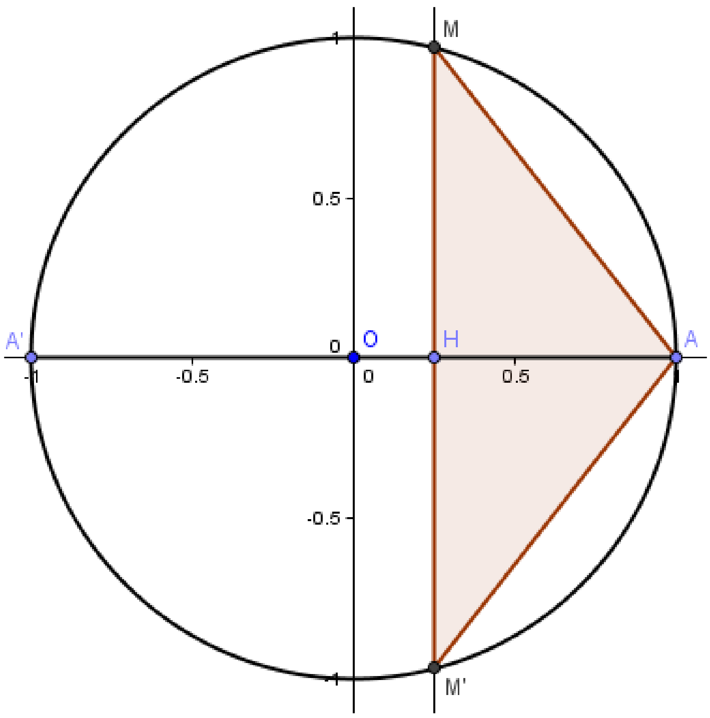
1) Montrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$.
2) Étudier la dérivabilité de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+6x}-4}{x-2}$.
5) On considère la fonction g définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\sqrt{\cos^2(x)+6\cos(x)}$.

Déterminer la fonction dérivée de g. On ne demande pas de justifier sa dérivabilité.

Exercice 4 (5 *points*)

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\ \vec{j})$ le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit les point A et A' de (Γ) de coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ et $(-1\,;\,0)$.

Par tout point H du segment $[A'A]$, distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite $(A'A)$. La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'. On appelle x l'abscisse du point H.



1) a) Déterminer HM en fonction de x.
   b) Calculer l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$.

Dresser le tableau de variations de f en justifiant.
3) Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.