CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Homothéties et dérivation	Le 16 octobre 2009

Exercice 1

1) Comme B' est le symétrique de A par rapport à B, alors $\overrightarrow{AB'} = 2\ \overrightarrow{AB}$.
On en déduit que **h est l'homothétie de centre A et de rapport 2**.

2) Comme D est le point de (Γ) diamétralement opposé à A, alors $\overrightarrow{AD} = 2\ \overrightarrow{AO}$.
Donc **l'image de O par h est D**.

Comme C' est le symétrique de A par rapport à C, alors $\overrightarrow{AC'} = 2\ \overrightarrow{AC}$.
Donc **l'image de C par h est C'**.

D'après la question précédente, on en déduit que **l'image du segment $[BC]$ par h est le segment $[B'C']$**.

3) a) D'après les propriétés de l'homothétie, l'image de (Γ) par h est un cercle de centre $h(O)$ et de rayon égale à 2 fois celui de (Γ). Or $h(O) = D$.
Donc **le centre de (Γ') est le point D**.

b) D'après a), on peut en déduire que $[DA]$ est un diamètre de (Γ').
Comme A, B et D sont sur le cercle (Γ) de diamètre $[DA]$, alors ABD est rectangle en B.
De plus, B est le milieu de $[AB']$; alors (DB) est la médiatrice de $[AB']$.
Par suite, $DB' = DA$. Par conséquent, **(Γ') passe par B'**.

Comme A, C et D sont sur le cercle (Γ) de diamètre $[DA]$, alors ACD est rectangle en C.
De plus, C est le milieu de $[AC']$; alors (DC) est la médiatrice de $[AC']$.
Par suite, $DC' = DA$. Par conséquent, **(Γ') passe par C'**.

4) a) D'après la question précédente, $DB' = DA$ et $DC' = DA$. On en déduit que le triangle $C'DB'$ est isocèle en D. Donc la hauteur issue de D dans ce triangle, la droite (DK) par hypothèse, est aussi la médiatrice du côté opposé à D.
Par conséquent, **la droite (DK) est la médiatrice de $[B'C']$**.

b) On sait que H est le milieu de $[BC]$. Comme une homothétie conserve les milieux, alors $h(H)$ est le milieu de $h([BC])$, c'est-à-dire de $[B'C']$ (d'après la question 2)).
D'où, d'après la question précédente, $\boldsymbol{h(H) = K}$.

Comme A est le centre de h, on en déduit que **les points A, H et K sont alignés**.

Exercice 2

1) $f = u^5$ avec $u(x) = x^3 - 2$.

Alors $f' = 5 \times u' \times u^{5-1}$ avec $u'(x) = 3x^2$. Par conséquent, $\boldsymbol{f'(x) = 15x^2\left(x^3 - 2\right)^4}$.

2) $g=\dfrac{1}{u^2}=u^{-2}$ avec $u(x)=5x+3$.

Alors $g'=-2u^{-2-1}u'=\dfrac{-2u'}{u^3}$ avec $u'(x)=5$. Par conséquent, $\boldsymbol{g'(x)=\dfrac{-10}{(5x+3)^3}}$.

3) $h=u^3\times v$ avec $u(x)=x-2$ et $v(x)=x+1$.

Alors $h'=\left(u^3\right)'\times v+u^3\times v'$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

Or $\left(u^3\right)'=3\times u^{3-1}\times u'=3\times u^2\times u'$.

D'où : $h'(x)=3\times(x-2)^2\times1\times(x+1)+(x-2)^3\times1=(x-2)^2\left[3(x+1)+(x-2)\right]$.

Par conséquent, $\boldsymbol{h'(x)=(x-2)^2(4x+1)}$.

4) La fonction m est la composée de la fonction $u:t\mapsto 1-2t$, dérivable sur **R** et de la fonction cosinus dérivable sur **R**. Donc la fonction m est dérivable sur **R**.
D'où, pour tout réel t, $m'(t)=\cos'\left[u(t)\right]\times u'(t)=-\sin(1-2t)\times(-2)$.

Par conséquent, **pour tout réel t, $\boldsymbol{m'(t)=2\sin(1-2t)}$**.

Exercice 3

1) On a $f=v\circ u$ avec $u(x)=x^2+6x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

Comme la fonction u est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et comme la fonction v est dérivable en tout $u(x)$ appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, c'est-à-dire pour x strictement positif, alors ***f* est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$**.

Soit x un réel strictement positif. $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x)=2x+6=2(x+3)$; alors

$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}}$ **pour tout réel x strictement positif**.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+6x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{6}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{6}{x}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$.

Par conséquent, **la fonction *f* n'est pas dérivable en 0, et la courbe (C_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0**.

3) Cette tangente a une équation de la forme $y=f'(2)(x-2)+f(2)$.

Or $f(2)=\sqrt{4+12}=4$ et $f'(2)=\dfrac{2+3}{\sqrt{4+12}}=\dfrac{5}{4}$. D'où : $y=\dfrac{5}{4}(x-2)+4=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{5}{2}+4=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2}$.

Par conséquent, la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2, a pour équation $\boldsymbol{y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2}}$.

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+6x}-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ car f est dérivable en 2.

D'où, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+6x}-4}{x-2}=\dfrac{5}{4}}$.

5) On a $g = f \circ m$ avec $m(x) = \cos(x)$.
D'où : $g' = (f' \circ m) \times m'$ avec $m'(x) = -\sin x$.
Par conséquent, $\boldsymbol{g'(x) = (-\sin x) \times \dfrac{\cos x + 3}{\sqrt{\cos^2 x + 6 \cos x}}}$.

Exercice 4
1) a) Dans le triangle OMH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 .$$

Or $OM = 1$ (car M appartient au cercle (Γ)) et $OH = x$. Alors : $HM^2 = 1 - x^2$.
Par conséquent, $\boldsymbol{HM = \sqrt{1 - x^2}}$.

b) L'aire de AMM' est égale à $\dfrac{AH \times MM'}{2}$.
Or $MM' = 2HM = 2\sqrt{1 - x^2}$ et $AH = 1 - x$. D'où, **l'aire de AMM' est égale à $(1 - x)\sqrt{1 - x^2}$** .

2) On pose $f = u\sqrt{v}$ avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = 1 - x^2$.
La fonction v est dérivable et strictement positive sur $]-1\,;\,1[$, d'où la fonction $\sqrt{v}$ est dérivable sur $]-1\,;\,1[$.
La fonction u est dérivable sur **R** donc sur $]-1\,;\,1[$.
Alors la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,1[$.
D'où : $f' = u'\sqrt{v} + u\dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$ avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -2x$.
Donc $\boldsymbol{f'(x)} = -\sqrt{1 - x^2} + (1 - x)\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{-(1 - x^2) - (1 - x)x}{\sqrt{1 - x^2}} \boldsymbol{= \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}}$, **pour tout x de $]-1\,;1[$** .

Comme $\sqrt{1 - x^2}$ est strictement positif, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $2x^2 - x - 1$. Or $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$. D'où $-\dfrac{1}{2}$ et 1 sont les racines de $f'(x)$.
On en déduit que :

x	-1		$-\dfrac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

3) D'après le tableau de variation précédent, la fonction f admet un maximum $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ atteint en $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $f(x)$ est égale à l'aire du triangle AMM', alors **l'aire de ce triangle est maximale lorsque $x = -\dfrac{1}{2}$**.

Travaillons dans le cas où $x = -\frac{1}{2}$.

Dans le triangle AMH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AM^2 = AH^2 + HM^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$. D'où $AM = \sqrt{3}$.

Par symétrie, $AM' = \sqrt{3}$. Et $MM' = 2HM = 2 \times \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Donc, **lorsque $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$, le triangle $\boldsymbol{AMM'}$ est équilatéral**.