

## DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

**Nombres complexes, continuité et  
théorème des valeurs intermédiaires**

**Le 9 décembre 2009**

### **Exercice 1** (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 2 cm.

On considère l'équation (E) :  $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$ .

- 1) a) Vérifier que le nombre complexe  $2i$  est solution de (E).
- b) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$  :

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = (z-2i)(z^2 + az + b)$$

- c) Résoudre dans  $\mathbf{C}$  l'équation (E).

2) Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1+i$  et  $z_B = 2i$ .

À tout nombre complexe  $z$  différent de  $z_A$ , on associe le nombre complexe  $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$ .

- a) Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z'| = 1$ . Déterminer et construire  $\mathcal{E}$ .
- b) Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit un imaginaire pur. Déterminer et construire  $\mathcal{F}$ .

### **Exercice 2** (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 2 cm.

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_B = \overline{z_A}$  et  $z_C = -3$ .

#### **Partie A**

- 1) Écrire les nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
- 2) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- 3) Démontrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

#### **Partie B**

Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan, associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{1}{3}iz^2.$$

On note  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les points respectivement associés par  $f$  aux points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

- 1) a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .
- b) Placer les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .
- c) Démontrer l'alignement des points  $O$ ,  $A$  et  $B'$  ainsi que celui des points  $O$ ,  $B$  et  $A'$ .
- 2) Soit  $G$  l'isobarycentre des points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On note  $G'$  le point associé à  $G$  par  $f$ .
- a) Déterminer les affixes des points  $G$  et  $G'$ .
- b) Le point  $G'$  est-il l'isobarycentre des points  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  ?
- 3) Démontrer que si  $M$  appartient à la droite  $(AB)$  alors  $M'$  appartient à la parabole

d'équation  $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$ . (On ne demande pas de tracer cette parabole)

**Exercice 3** (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1) Pour tout complexe  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re}(z))^2$ .

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  non nul, les points  $M$  d'affixe  $z$ ,  $N$  d'affixe  $\bar{z}$  et  $P$  d'affixe  $\frac{z^2}{z}$  appartiennent à un même cercle de centre  $O$ .

3) Pour tout nombre complexe  $z$ , si  $|1+iz| = |1-iz|$  alors la partie imaginaire de  $z$  est nulle.

4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Quels que soient les nombres complexes  $z$  et  $z'$  non nuls, d'images respectives  $M$  et  $M'$  dans le plan complexe, si  $z$  et  $z'$  vérifient l'égalité  $|z+z'| = |z-z'|$ , alors les droites  $(OM)$  et  $(OM')$  sont perpendiculaires.

**Exercice 4** (4 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$ .

1) On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ .

Établir que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

2) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  et  $g(x)$  sont de signes contraires.

b) En déduire les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .