

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

**Nombres complexes, continuité et
théorème des valeurs intermédiaires**

Le 9 décembre 2009

Exercice 1

1) a)

$$(2i)^3 - 2(1+i)(2i)^2 + 2(1+2i)2i - 4i = -8i + 8(1+i) + 2(1+2i)2i - 4i = -8i + 8 + 8i + 4i - 8 - 4i = 0$$

Donc le nombre complexe $2i$ est solution de (E).

$$b) (z-2i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - 2aiz - 2ib = z^3 + (a-2i)z^2 + (b-2ai)z - 2ib.$$

$$\text{Par identification, on obtient : } \begin{cases} a-2i = -2-2i \\ b-2ai = 2+4i \\ -2ib = -4i \end{cases}$$

$$\text{Or } \begin{cases} a-2i = -2-2i \\ b-2ai = 2+4i \\ -2ib = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2-2i+2i = -2 \\ b-2ai = 2+4i \\ b = \frac{-4i}{-2i} = 2 \end{cases}.$$

Pour tout nombre complexe z : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = (z-2i)(z^2 - 2z + 2)$.

c) D'après la question précédente, $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$ équivaut à $z-2i=0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$, c'est-à-dire à $z=2i$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Réolvons l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 4 - 8 = -4$. Alors cette équation admet deux solutions

complexes conjuguées : $z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$ et $z_2 = 1+i$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $\{2i ; 1-i ; 1+i\}$.

$$\begin{aligned} 2) a) \quad |z'|=1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-2i}{z-1-i} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|z-2i|}{|z-1-i|} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \\ &\Leftrightarrow BM = AM \end{aligned}$$

Par conséquent, \mathcal{E} est la médiatrice de $[AB]$.

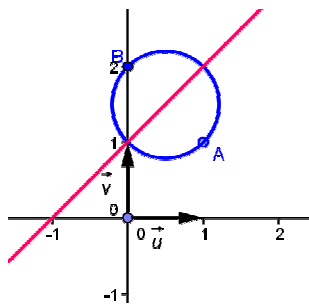
$$b) \quad z' \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2i}{z-1-i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow ABM \text{ est rectangle en } M$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB], \text{ privé de } A$$

Par conséquent, \mathcal{F} est le cercle de diamètre $[AB]$, privé de A .



Exercice 2 (Liban, juin 2009)

Partie A

$$1) |z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}. \text{ Alors } z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$\text{Comme } z_B = \overline{z_A}, \text{ alors } z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

2) Voir ci-dessous.

$$3) AB = |z_B - z_A| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}; \quad AC = |z_C - z_A| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ et}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}. \text{ Donc } \mathbf{ABC} \text{ est un triangle équilatéral.}$$

Partie B

$$1) a) z_{A'} = \frac{1}{3}i z_A^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}};$$

$$z_{B'} = \frac{1}{3}i z_B^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{C'} = \frac{1}{3}i z_C^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 9 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

b) Voir ci-dessous.

$$c) z_{\overline{OB}} = z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_{\overline{OA}} = z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}z_{\overline{OB}}. \text{ D'où : } \overline{OA} = \sqrt{3}\overline{OB}.$$

Par suite, **les points O, A et B' sont alignés.**

$$\overline{OB} \text{ a pour coordonnées } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \overline{OA'} \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

D'où : $\overline{OB} = -\sqrt{3}\overline{OA'}$. Par suite, **les points O, A' et B sont alignés.**

2) a) Comme G est l'isobarycentre des points O, A, B et C , alors pour tout point M du plan, $\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 4\overline{MG}$.

Prenons $M = O$; on obtient : $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 4\overline{OG}$.

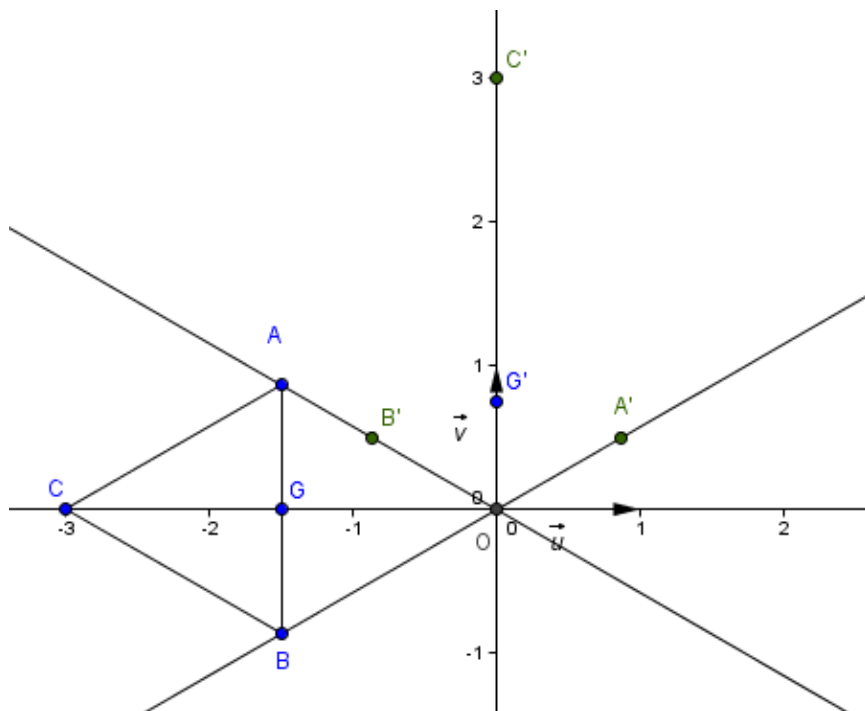
$$\text{Par suite, } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3}{4} = \frac{-6}{4}.$$

Donc **G** a pour affixe $-\frac{3}{2}$.

$$\text{Par conséquent, } z_{G'} = \frac{1}{3}i z_G^2 = \frac{1}{3}i \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}i$$

b) Soit H l'isobarycentre des points O' , A' , B' et C' .

$$\text{Alors } z_H = \frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 3i}{4} = i. \text{ Comme } H \text{ et } G' \text{ sont distincts, alors } G' \text{ n'est pas l'isobarycentre des points } O', A', B' \text{ et } C'.$$



3) Si M appartient à (AB) , alors $z_M = -\frac{3}{2} + it$ où t est un réel.

$$\text{Alors } z_{M'} = \frac{1}{3}i \left(-\frac{3}{2} + it\right)^2 = \frac{1}{3}i \left(\frac{9}{4} - 3it - t^2\right) = t + i \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2\right), \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_{M'} = t \\ y_{M'} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2 \end{cases}$$

Par conséquent, si M appartient à (AB) , alors M' appartient à la parabole d'équation

$$y = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2.$$

Exercice 3 (Centres étrangers, juin 2009)

1) **FAUSSE.**

En effet, si $z = 1 + i$, alors $z^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. D'où : $\text{Re}(z^2) = 0$ et $(\text{Re}(z))^2 = 1^2 = 1$.

2) VRAIE.

En effet, $ON = |z_N| = |\bar{z}| = |z| = OM$. De plus, $OP = |z_P| = \left| \frac{z^2}{z} \right| = \frac{|z^2|}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| = OM$.

Donc $OM = ON = OP$.

3) VRAIE.

Soit $z = a + ib$ où a et b sont des réels. Alors :

$$\begin{aligned} |1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\ &\Leftrightarrow |(1-b) + ia|^2 = |(1+b) - ia|^2 \\ &\Leftrightarrow (1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2 \\ &\Leftrightarrow 1-2b+b^2+a^2 = 1+2b+b^2+a^2 \\ &\Leftrightarrow 4b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \end{aligned}$$

4) VRAIE.

Soit P le point tel que $OMPM'$ soit un parallélogramme.

Alors $z + z' = z_{\overline{OM}} + z_{\overline{OM'}} = z_{\overline{OP}}$ et $z - z' = z_{\overline{OM}} - z_{\overline{OM'}} = z_{\overline{OM}} + z_{\overline{M'O}} = z_{\overline{M'M}}$.

Donc $|z + z'| = |z - z'|$ équivaut à $|z_{\overline{OP}}| = |z_{\overline{M'M}}|$, c'est-à-dire à $OP = M'M$.

Or un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle.

Donc $|z + z'| = |z - z'|$ équivaut à « $OMPM'$ est un rectangle », c'est-à-dire à

« (OM) et (OM') sont perpendiculaires ».

Exercice 4 (Polynésie, juin 2009)

1) La fonction g est dérivable, donc continue, sur $[0 ; +\infty[$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel x positif, $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Comme x est positif, alors $g'(x) > 0$. Par suite, la fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

De plus, $g(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ (règle du monôme de plus haut degré).

Comme g est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et que $0 \in [-1 ; +\infty[$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.**

2) a) On remarque que $f = u e^v$ avec $u(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ et $v(x) = -x$.

Comme u est une fonction rationnelle, alors elle est dérivable sur son ensemble de définition \mathbf{R} , donc sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction v est dérivable sur \mathbf{R} donc la fonction e^v est dérivable sur \mathbf{R} , et par suite sur $[0 ; +\infty[$.

Alors la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, et $f' = u'e^v + uv'e^v$ avec

$$u'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \text{ et } v'(x) = -1. \text{ D'où :}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} e^{-x} - \frac{x}{x^2 + 1} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{(x^2 + 1)^2} [(-x^2 + 1) - x(x^2 + 1)] = \frac{[-x^3 - x^2 - x + 1] e^{-x}}{(x^2 + 1)^2},$$

C'est-à-dire $f'(x) = -\frac{g(x)e^{-x}}{(x^2 + 1)^2}$.

Comme $\frac{e^{-x}}{(x^2 + 1)^2} > 0$, alors **pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.**

b) D'après la question 2), on en déduit le signe de $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-

Par conséquent, **la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$.**