

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

**Nombres complexes, probabilités et
fonction logarithme népérien**

Le 15 janvier 2010

Exercice 1 (8 points)

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte rapporte - 0,5 points et une absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous devez répondre par VRAI ou FAUX. Aucune justification n'est demandée.

	VRAI	FAUX
Soit a et b des réels strictement positifs :		
1) pour tout couple $(a ; b)$, $\frac{\ln a}{\ln b} = \ln a - \ln b$;		
2) pour tout couple $(a ; b)$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$;		
3) quel que soit a , $(\ln a)^2 = 2 \ln a$;		
4) il existe au moins une valeur de a telle que $(\ln a)^2 = \ln(a^2)$;		
Soit x un réel non nul :		
5) pour tout x , $\ln(x^2) \geq 0$;		
6) $\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ si et seulement si $x = 1$;		
7) si $\ln(x^2) = 0$, alors $x = 1$;		
8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 0$;		

Exercice 2 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $] -3 ; 4[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+3}\right)$.

Dresser le tableau de variations, complet, de la fonction f .

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

- 1) a) Donner la forme exponentielle de z_B , puis de z_C .
b) Placer les points A, B , et C .
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère $OCAB$.
- 3) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par

$$z' = \frac{-4}{z-2}.$$

1) a) Résoudre dans \mathbf{C} l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.

b) En déduire les points B' et C' associés aux points B et C .

c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OBC .

2) a) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

b) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de (Δ) , où (Δ) est l'ensemble défini à la question 3) de la **partie A**.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ) .

Exercice 4 (4 points)

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1) Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b) Démontrer que $p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{1}{4}$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2) Calcul de probabilités.

a) Démontrer que $p(S) = 0,934$.

b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3) Étude d'une variable aléatoire B .

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B .

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .