CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Nombres complexes, probabilités et fonction logarithme népérien	*Le 15 janvier 2010*

Exercice 1

1) $\dfrac{\ln(e^2)}{\ln e} = \dfrac{2\ln e}{\ln e} = 2$ et $\ln(e^2) - \ln e = 2\ln e - \ln e = 2 - 1 = 1$. ***Réponse :*** FAUX

2) $\ln e + \ln 1 = 1 + 0 = 1$ et $\ln(e+1) \neq 1$. ***Réponse :*** FAUX

3) $(\ln e)^2 = 1^2 = 1$ et $2\ln e = 2$. ***Réponse :*** FAUX

4) il existe au moins une valeur de a telle que $(\ln a)^2 = \ln(a^2)$ car

$(\ln 1)^2 = 0^2 = 0$ et $\ln(1^2) = \ln 1 = 0$. ***Réponse :*** VRAI

5) En effet si x appartient à]0 ; 1[, alors x^2 appartient à]0 ; 1[, et dans ce cas, $\ln(x^2) < 0$.
Réponse : FAUX

6) Intervalle d'étude : il faut que x soit strictement positif.

$\ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ équivaut à $x^2 = \dfrac{1}{x}$, c'est-à-dire à $x^3 = 1$.

Or $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et x^2+x+1 ne s'annule pas sur l'ensemble des réels.

Donc $\ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ équivaut à x = 1. ***Réponse :*** VRAI

7) Intervalle d'étude : il faut que x soit un réel.

Si $\ln(x^2) = 0$, alors $x^2 = e^0 = 1$ car les fonctions ln et exp sont réciproques.
D'où x = - 1 ou x = 1. ***Réponse :*** FAUX

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2$. En effet, $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2$.

En posant X = 2x, on obtient $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ car $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$. ***Réponse :*** FAUX

Exercice 2

1) Recherche des limites aux bornes de l'ensemble de définition :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} (4-x) = 7 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} (1+x) = 0^+ \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} \left(\frac{4-x}{x+3}\right) = +\infty .$$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$; d'où $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} f(x) = +\infty}$ (d'après la limite d'une fonction composée).

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} (4-x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} (x+3) = 7\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \left(\dfrac{4-x}{x+3}\right) = 0$.

Or $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$; d'où $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} f(x) = -\infty}$ (d'après la limite d'une fonction composée).

2) Recherche des variations de *f* :

On a : $f = \ln \circ u$ avec $u(x) = \dfrac{4-x}{x+3}$.

La fonction u est strictement positive et dérivable sur $]-3\ ;\ 4[$ en tant que fonction rationnelle. Alors f est dérivable sur $]-3\ ;\ 4[$.

D'où : $f' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u'(x) = \dfrac{(-1)\times(x+3)-(4-x)\times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{-7}{(x+3)^2}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f'(x)} = \dfrac{\dfrac{-7}{(x+3)^2}}{\dfrac{4-x}{x+3}} = \boldsymbol{\dfrac{-7}{(x+3)(4-x)}}$**, pour tout réel *x* de** $\boldsymbol{]-3\ ;\ 4[}$.

Comme $(4-x)(x+3) > 0$ pour tout x de $]-3\ ;\ 4[$, alors $f'(x) < 0$.

On en déduit que **la fonction *f* est strictement décroissante sur** $\boldsymbol{]-3\ ;\ 4[}$.

3) Tableau de variations de *f* :

x	-3		4
$f'(x)$	‖	$-$	‖
f	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

<u>Exercice 3</u> (*Amérique du Nord, juin 2006*)

Partie A

1) a) $\boldsymbol{z_B} = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \boldsymbol{= 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$. Comme $z_C = \overline{z_B}$, alors $\boldsymbol{z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$.

b) Voir à la fin de l'exercice.

2) $OB = |z_B - 0| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $OC = |z_C - 0| = \left|\overline{z_B}\right| = |z_B| = 2$;

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $AC = |z_C - z_A| = |-1 - i\sqrt{3}| = 2$.

Comme $AB = BO = OC = AC$, alors ***OCAB* est un losange**.

3) $|z| = |z-2|$ équivaut à $OM = AM$.

Par conséquent, (Δ) **est la médiatrice du segment** $\boldsymbol{[OA]}$.

Partie B

1) a) $z=\dfrac{-4}{z-2}$ équivaut à $z(z-2)=-4$, c'est-à-dire à $z^2-2z+4=0$.

$\Delta=(-2)^2-4\times4=-12$; alors cette équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{2-i\sqrt{12}}{2}=1-i\sqrt{3} \text{ et } z_2=\overline{z_1}=1+i\sqrt{3}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{S=\left\{1-i\sqrt{3}\ ;\ 1+i\sqrt{3}\right\}}$.

b) On en déduit que $\boldsymbol{B'=B}$ **et** $\boldsymbol{C'=C}$.

c) L'affixe du point G est $z_G=\dfrac{1}{3}(z_O+z_B+z_C)=\dfrac{1}{3}\left(0+1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

D'où $\boldsymbol{z_{G'}}=\dfrac{-4}{\frac{2}{3}-2}=\dfrac{-4}{-\frac{4}{3}}\boldsymbol{=3}$.

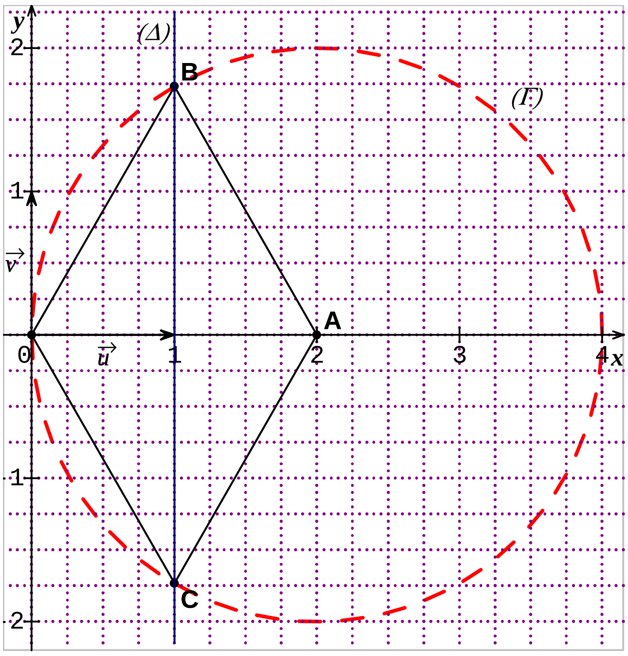
2) a) Soit z un nombre complexe distinct de 2,

$|z'-2|=\left|\dfrac{-4}{z-2}-2\right|=\left|\dfrac{-4-2z+4}{z-2}\right|=\left|\dfrac{-2z}{z-2}\right|=\dfrac{|-2||z|}{|z-2|}$.

Par conséquent, **pour tout nombre complexe z distinct de 2,** $\boldsymbol{|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}}$.

b) Comme $M(z)$ appartient à (Δ), alors $|z|=|z-2|$. D'où : $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}=\dfrac{2|z|}{|z|}=2$.

On en déduit que : $AM'=2$.
Par conséquent, **le point M' associé à M, appartenant à (Δ), appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2**.



<u>Exercice 4</u> *(Asie, juin 2007)*

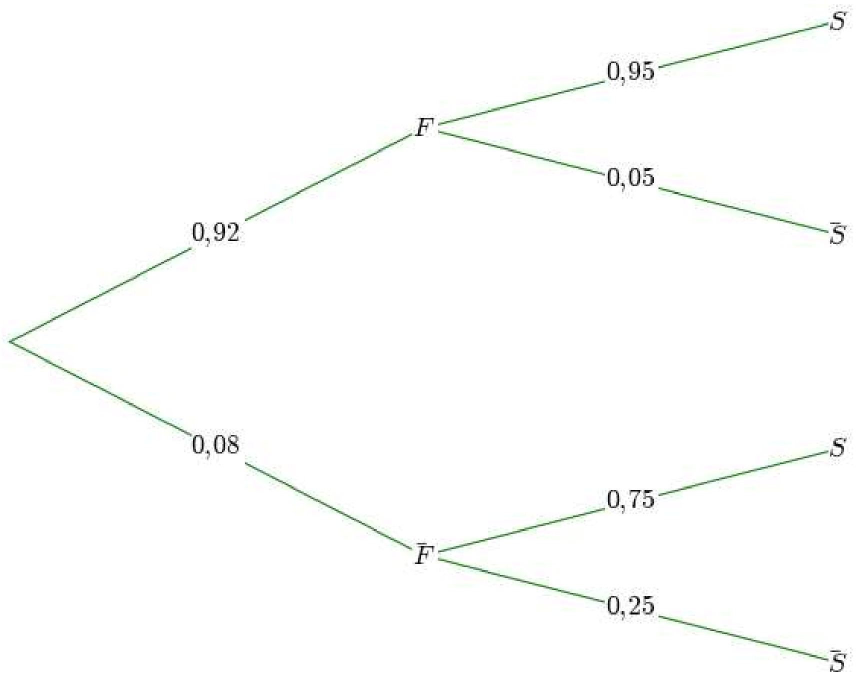
1) a) Comme 92 % des jouets sont sans défaut de finition, alors $\boldsymbol{p(F)=0{,}92}$. On en déduit que $\boldsymbol{p\left(\overline{F}\right)}=1-0{,}92=\boldsymbol{0{,}08}$.

Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ; alors $\boldsymbol{p_F(S) = 0{,}95}$. On en déduit que $\boldsymbol{p_F}(\overline{\boldsymbol{S}}) = 1 - 0{,}95 = \boldsymbol{0{,}05}$.

Comme 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles, alors $\boldsymbol{p(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}02}$.

b) $\boldsymbol{p_{\overline{F}}(\overline{S})} = \dfrac{p(\overline{F} \cap \overline{S})}{p(\overline{F})} = \dfrac{0{,}02}{0{,}08} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$.

c)



2) a) F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(S) = p(F \cap S) + p(\overline{F} \cap S) &= p(F) \times p_F(S) + p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(S) \\ &= 0{,}92 \times 0{,}95 + 0{,}08 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}874 + 0{,}06 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boldsymbol{p(S) = 0{,}934}$.

b) On recherche $p_S(F)$. Or $p_S(F) = \dfrac{p(S \cap F)}{p(S)} = \dfrac{0{,}874}{0{,}934} \approx 0{,}936$.

Sachant que le jouet a réussi le test de solidité, la probabilité qu'il soit sans défaut de finition est égale à 0,936 (au millième près).

3) a) Les valeurs que peut prendre B sont : 0 ; 5 et 10.

$p(B=0) = p(F \cap \overline{S}) + p(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}92 \times 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}066$.

$p(B=5) = p(\overline{F} \cap S) = 0{,}08 \times 0{,}75 = 0{,}06$.

$p(B=10) = p(F \cap S) = 0{,}874$.

La loi de probabilité de B est donc résumée par :

b_i	0	5	10
$p(B=b_i)$	0,066	0,06	0,874

b) $\boldsymbol{E(B)} = 0 \times 0{,}066 + 5 \times 0{,}06 + 10 \times 0{,}874 = \boldsymbol{9{,}04}$ **€**.