

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

**Nombres complexes, probabilités et
fonction logarithme népérien**

Le 15 janvier 2010

Exercice 1

1) $\frac{\ln(e^2)}{\ln e} = \frac{2\ln e}{\ln e} = 2$ et $\ln(e^2) - \ln e = 2\ln e - \ln e = 2 - 1 = 1$. **Réponse : FAUX**

2) $\ln e + \ln 1 = 1 + 0 = 1$ et $\ln(e+1) \neq 1$. **Réponse : FAUX**

3) $(\ln e)^2 = 1^2 = 1$ et $2\ln e = 2$. **Réponse : FAUX**

4) il existe au moins une valeur de a telle que $(\ln a)^2 = \ln(a^2)$ car

$(\ln 1)^2 = 0^2 = 0$ et $\ln(1^2) = \ln 1 = 0$. **Réponse : VRAI**

5) En effet si x appartient à $]0 ; 1[$, alors x^2 appartient à $]0 ; 1[$, et dans ce cas, $\ln(x^2) < 0$.

Réponse : FAUX

6) Intervalle d'étude : il faut que x soit strictement positif.

$\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ équivaut à $x^2 = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire à $x^3 = 1$.

Or $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ et $x^2 + x + 1$ ne s'annule pas sur l'ensemble des réels.

Donc $\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ équivaut à $x = 1$. **Réponse : VRAI**

7) Intervalle d'étude : il faut que x soit un réel.

Si $\ln(x^2) = 0$, alors $x^2 = e^0 = 1$ car les fonctions \ln et \exp sont réciproques.

D'où $x = -1$ ou $x = 1$. **Réponse : FAUX**

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$. En effet, $\frac{\ln(1+2x)}{x} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2$.

En posant $X = 2x$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$. **Réponse : FAUX**

Exercice 2

1) Recherche des limites aux bornes de l'ensemble de définition :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3} (4-x) = 7 \\ \lim_{x > -3} (1+x) = 0^+ \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \left(\frac{4-x}{x+3} \right) = +\infty .$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$; d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$ (d'après la limite d'une fonction composée).

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} (4-x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} (x+3) = 7 \end{array} \right\} \text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \left(\frac{4-x}{x+3} \right) = 0.$$

Or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$; d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty$ (d'après la limite d'une fonction composée).

2) Recherche des variations de f :

On a : $f = \ln \circ u$ avec $u(x) = \frac{4-x}{x+3}$.

La fonction u est strictement positive et dérivable sur $] -3 ; 4[$ en tant que fonction rationnelle. Alors f est dérivable sur $] -3 ; 4[$.

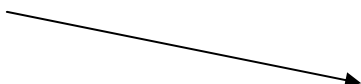
D'où : $f' = \frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = \frac{(-1) \times (x+3) - (4-x) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{-7}{(x+3)^2}$.

Par conséquent, $f'(x) = \frac{\frac{-7}{(x+3)^2}}{\frac{4-x}{x+3}} = \frac{-7}{(x+3)(4-x)}$, pour tout réel x de $] -3 ; 4[$.

Comme $(4-x)(x+3) > 0$ pour tout x de $] -3 ; 4[$, alors $f'(x) < 0$.

On en déduit que **la fonction f est strictement décroissante sur $] -3 ; 4[$.**

3) Tableau de variations de f :

x	-3		4
$f'(x)$		-	
f	$+\infty$		$-\infty$

Exercice 3 (Amérique du Nord, juin 2006)

Partie A

1) a) $z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Comme $z_C = \overline{z_B}$, alors $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) Voir à la fin de l'exercice.

2) $OB = |z_B - 0| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $OC = |z_C - 0| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2$;

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $AC = |z_C - z_A| = |-1 - i\sqrt{3}| = 2$.

Comme $AB = BO = OC = AC$, alors **OCAB est un losange**.

3) $|z| = |z-2|$ équivaut à $OM = AM$.

Par conséquent, **(Δ) est la médiatrice du segment $[OA]$** .

Partie B

1) a) $z = \frac{-4}{z-2}$ équivaut à $z(z-2) = -4$, c'est-à-dire à $z^2 - 2z + 4 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12$; alors cette équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Par conséquent, $S = \{1 - i\sqrt{3} ; 1 + i\sqrt{3}\}$.

b) On en déduit que $B' = B$ et $C' = C$.

c) L'affixe du point G est $z_G = \frac{1}{3}(z_0 + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(0 + 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}) = \frac{2}{3}$.

$$\text{D'où } z_{G'} = \frac{-4}{\frac{2}{3} - 2} = \frac{-4}{-\frac{4}{3}} = 3.$$

2) a) Soit z un nombre complexe distinct de 2,

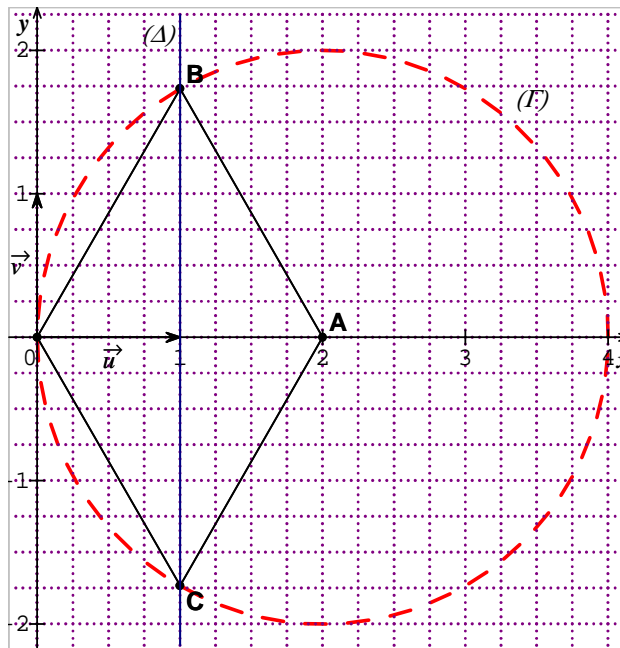
$$|z' - 2| = \left| \frac{-4}{z-2} - 2 \right| = \left| \frac{-4 - 2z + 4}{z-2} \right| = \left| \frac{-2z}{z-2} \right| = \frac{|-2||z|}{|z-2|}.$$

Par conséquent, pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

b) Comme $M(z)$ appartient à (Δ) , alors $|z| = |z-2|$. D'où : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|} = \frac{2|z|}{|z|} = 2$.

On en déduit que : $AM' = 2$.

Par conséquent, le point M' associé à M , appartenant à (Δ) , appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2.



Exercice 4 (Asie, juin 2007)

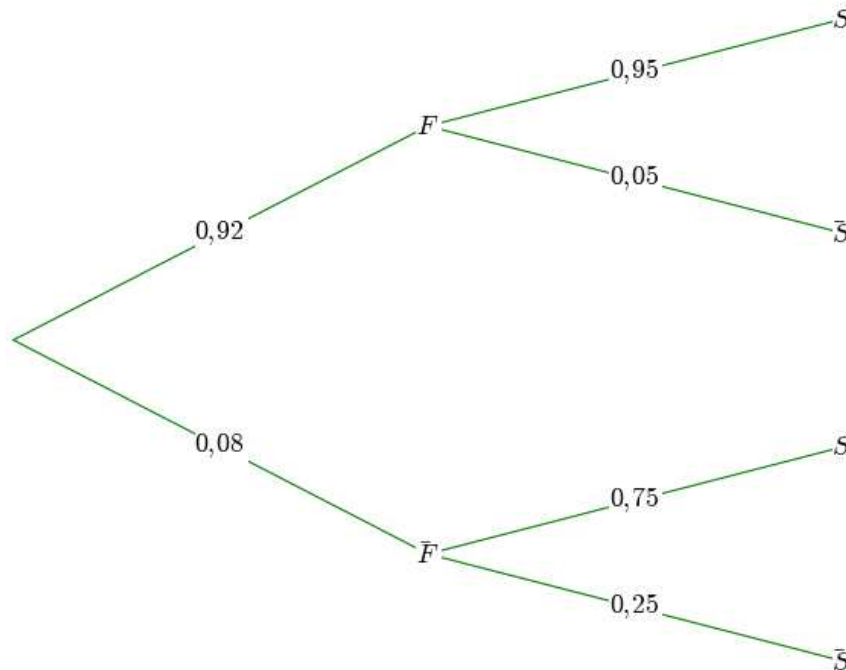
1) a) Comme 92 % des jouets sont sans défaut de finition, alors $p(F) = 0,92$. On en déduit que $p(\bar{F}) = 1 - 0,92 = 0,08$.

Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ; alors $p_F(S) = 0,95$. On en déduit que $p_F(\bar{S}) = 1 - 0,95 = 0,05$.

Comme 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles, alors $p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,02$.

$$b) p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{F})} = \frac{0,02}{0,08} = \frac{1}{4}.$$

c)



2) a) F et \bar{F} forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S) = p(F) \times p_F(S) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S) \\ &= 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 \\ &= 0,874 + 0,06 \end{aligned}$$

Par conséquent, $p(S) = 0,934$.

$$b) \text{ On recherche } p_S(F). \text{ Or } p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} = \frac{0,874}{0,934} \approx 0,936.$$

Sachant que le jouet a réussi le test de solidité, la probabilité qu'il soit sans défaut de finition est égale à 0,936 (au millième près).

3) a) Les valeurs que peut prendre B sont : 0 ; 5 et 10.

$$p(B=0) = p(F \cap \bar{S}) + p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,92 \times 0,05 + 0,02 = 0,066.$$

$$p(B=5) = p(\bar{F} \cap S) = 0,08 \times 0,75 = 0,06.$$

$$p(B=10) = p(F \cap S) = 0,874.$$

La loi de probabilité de B est donc résumée par :

b_i	0	5	10
$p(B = b_i)$	0,066	0,06	0,874

$$b) E(B) = 0 \times 0,066 + 5 \times 0,06 + 10 \times 0,874 = 9,04 \text{ €}.$$