DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Dénombrement et produit scalaire	**Le 12 mars 2010**

Exercice 1 (5 *points*)

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*
On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ *alors* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p \leq n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3. On tire simultanément deux jetons de ce sac.

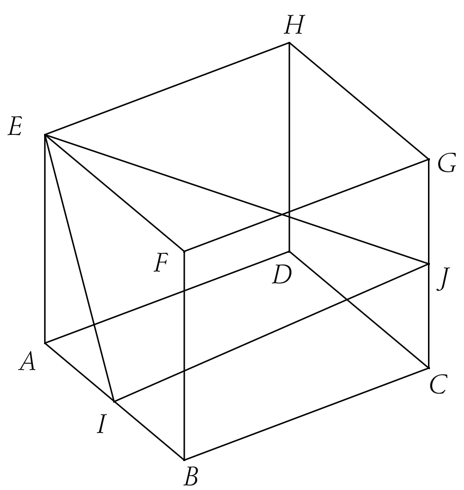
1) a) On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.
b) On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
Calculer la probabilité de B.
c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 (4 points)

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 1 point. Toute réponse erronée enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre. Le candidat est appelé à juger chacune des quatre affirmations suivantes.



$n°$	Affirmation	Vrai ou Faux
1	$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$	
2	$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AB}$	
3	$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{IC}$	
4	$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{IJ} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{3}$	

<u>Exercice 3</u> (11 points)

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points : $A(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $H\left(\frac{2}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\right)$.

1) *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer la distance de O à ce plan (ABC).

3) Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

4) a) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (OCH).

b) Démontrer que les points O et C ont le même projeté orthogonal sur la droite (AB). On appelle K ce projeté.

5) a) Calculer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{CH}$.

b) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{OCH}$.

6) Calculer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{CK} \bullet \overrightarrow{CO}$ et en déduire une valeur approchée de CK.

7) Calculer l'aire du triangle ABC.