

## CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

**Dénombrement et produit scalaire**

**Le 12 mars 2010**

### **Exercice 1** (France, juin 2009)

I. **1<sup>ère</sup> méthode** : en utilisant la notation factorielle :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times p}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)! \times (p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)! \times n}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \end{aligned}$$

Par conséquent, **pour tout nombre entier naturel  $n$  et pour tout nombre entier naturel  $p$**

**tels que  $1 \leq p \leq n$  on a :**  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ .

**2<sup>nde</sup> méthode** : la méthode dite de « Messi » :

$F$  est un ensemble de  $n$  éléments,  $a$  est l'un d'eux ;  $F$  contient donc  $n-1$  éléments autres que  $a$ . Soit  $A$  une partie de  $F$  ayant  $p$  éléments.

Deux cas peuvent se produire : soit  $a \in A$ , soit  $a \notin A$ .

Si  $a \in A$ , les  $p-1$  autres éléments de  $A$  sont choisis parmi les  $n-1$  éléments de  $F$ .

Si  $a \notin A$ , les  $p$  éléments de  $A$  sont choisis parmi  $n-1$  éléments de  $F$ , d'où la formule :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

II. Comme on tire deux boules simultanément de l'urne, nous sommes en présence d'un tirage sans ordre. Un tirage est donc une combinaison de deux objets pris parmi 10.

D'où :  $\text{card}(\Omega) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ , c'est-à-dire qu'il y a **45 tirages possibles**.

1) a) L'issue « tirer deux jetons blancs » est une combinaison de 2 éléments pris parmi 7.

Il y a donc  $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$  tirages favorables à cet événement.

Par conséquent,  $p(A) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ .

b) Il y a 6 jetons portant un numéro impair ; une issue de l'évènement  $B$  est une

combinaison de 2 éléments pris parmi 6. D'où :  $\text{card}(B) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ .

Par conséquent,  $p(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ .

c)  $A \cap B$  est l'évènement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ».

Une issue de  $A \cap B$  est une combinaison de 2 éléments pris parmi 4.

Donc  $\text{card}(A \cap B) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ . Par suite,  $p(A \cap B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$ .

Or  $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$ . Comme  $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$ , **les évènements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants**.

2) a)  $X$  peut prendre les valeurs : 0 ; 1 et 2.

$$p(X=2) = p(A) = \frac{7}{15} \quad ; \quad p(X=0) = p(\text{"obtenir deux jetons noirs"}) = \frac{\binom{3}{2}}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \quad \text{et}$$

$$p(X=1) = p(\text{"obtenir un jeton blanc"}) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{1}}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

La loi de probabilité de  $X$  est donc résumée dans le tableau suivant :

$x_i$	0	1	2
$p_i$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

$$\text{b) } E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

### Exercice 2 (Amérique du Sud, novembre 2005)

$n^\circ$	Affirmation	Vrai ou Faux
1	$\overline{AC} \cdot \overline{AI} = \frac{1}{2}$	Vrai
2	$\overline{AC} \cdot \overline{AI} = \overline{AI} \cdot \overline{AB}$	Vrai
3	$\overline{AB} \cdot \overline{IJ} = \overline{AB} \cdot \overline{IC}$	Vrai
4	$\overline{AB} \cdot \overline{IJ} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3}$	Faux

1) Comme  $B$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AI)$ , alors

$\overline{AC} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = AB \times AI = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ; en effet, les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AI}$  sont colinéaires et de même sens.

2)  $\overline{AC} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \overline{AI} \cdot \overline{AB}$  d'après 1).

3)  $\overline{AB} \cdot \overline{IJ} = \overline{AB} \cdot (\overline{IC} + \overline{CJ}) = \overline{AB} \cdot \overline{IC} + \overline{AB} \cdot \overline{CJ} = \overline{AB} \cdot \overline{IC} + 0$  puisque les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{CJ}$  sont orthogonaux.

4)  $\overline{AB} \cdot \overline{IJ} = \overline{AB} \cdot \overline{IC} = \overline{AB} \cdot \overline{IC} = \overline{AB} \cdot \overline{IB}$  car  $B$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AI)$ .

Or  $\overline{AB} \cdot \overline{IB} = AB \times IB = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Et,  $AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3} = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Donc l'égalité est fautive.

### Exercice 3

$$\begin{aligned} 1) \quad M(x; y; z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overline{AM_0} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0) \times a + (y - y_0) \times b + (z - z_0) \times c = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, le plan passant par  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et ayant pour vecteur normal  $\vec{n}(a, b, c)$  a pour équation  $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$ .

2) a) Les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ont pour coordonnées respectives  $(-2; 1; 0)$  et  $(-2; 0; 1)$ .

Comme  $\frac{x_{\overline{AB}}}{x_{\overline{AC}}} \neq \frac{y_{\overline{AB}}}{y_{\overline{AC}}}$ , alors  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont pas colinéaires.

On en déduit que les points **A, B et C déterminent un plan.**

b) Le plan  $(ABC)$  a pour équation a pour vecteur normal  $\vec{n}$ . Ce vecteur normal est orthogonal aux vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$ , non colinéaires, du plan  $(ABC)$ .

Cherchons les coordonnées  $(a; b; c)$  de  $\vec{n}$ .

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 \text{ équivaut à } \begin{cases} -2a + 1b + 0c = 0 \\ -2a + 0b + 1c = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \begin{cases} b = 2a \\ c = 2a \end{cases}.$$

Donc  $\vec{n}$  a pour coordonnées **(1 ; 2 ; 2)**.

Par conséquent,  $M(x; y; z) \in (ABC)$  équivaut à  $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , c'est-à-dire à  $(x-2) \times 1 + (y-0) \times 2 + (z-0) \times 2 = 0$ .

Donc **(ABC) a pour équation  $x + 2y + 2z - 2 = 0$ .**

c) Par définition, la distance du point  $O$  au plan  $(ABC)$  est égale à  $\frac{|x_0 + 2y_0 + 2z_0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$ .

Par conséquent, la distance du point  $O$  au plan **(ABC) est égale à  $\frac{2}{3}$ .**

3)  $H$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$  si  $H$  appartient au plan  $(ABC)$  et si  $OH = \frac{2}{3}$ .

•  $x_H + 2y_H + 2z_H - 2 = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} - 2 = \frac{18}{9} - 2 = 2 - 2 = 0$ , donc  **$H$  appartient au plan  $(ABC)$ .**

$$\bullet \text{ } OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2} = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent,  **$H$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$ .**

4) a) • Comme  $H$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$ , alors la droite  $(OH)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .  **$(OH)$  est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à la droite  $(AB)$ .**

• De plus,  $\overline{AB} \cdot \overline{OC} = (-2) \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ . D'où les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{OC}$  sont orthogonaux. Donc les droites  **$(AB)$  et  $(CO)$  sont orthogonales.**

• Comme la droite  $(AB)$  est orthogonale à deux droites sécantes  $(OH)$  et  $(CO)$  du plan  $(OCH)$ , alors la droite  **$(AB)$  est orthogonale au plan  $(OCH)$ .**

b) Soit  $K$  le projeté orthogonal du point  $O$  sur la droite  $(AB)$ . Par définition,  $K$  est le point d'intersection de la droite  $(AB)$  et du plan  $\mathcal{P}$  orthogonal à la droite  $(AB)$  passant par  $O$ .

