DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Fonctions puissances et calcul intégral	*Le 9 avril 2010*

Exercice 1 (3 *points*)

Calculer les intégrales suivantes, **la rédaction devant être détaillée** :

a) $A = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$; b) $B = \int_1^e \frac{\ln t}{t}dt$; c) $C = \int_1^2 2e^{3x}dx$.

Exercice 2 (4 points)

1) ***Restitution organisée de connaissances***

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

2) Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^\pi e^x \sin x\ dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos x\ dx$.

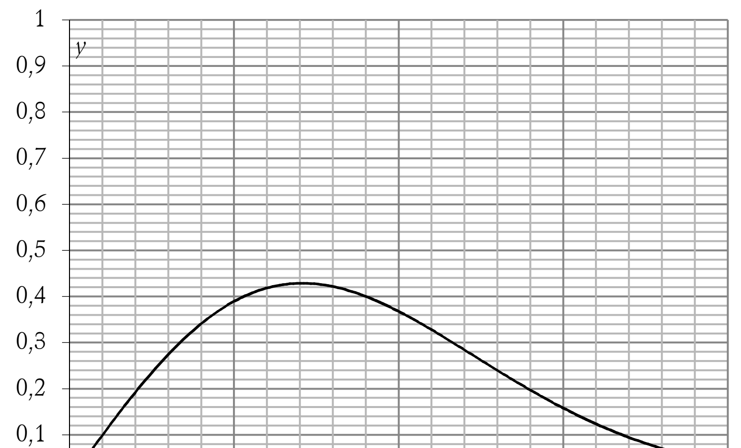
a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 3 (3 points)

Soit f la fonction définie sur 'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-dessous.



1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

3) Quelle est la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

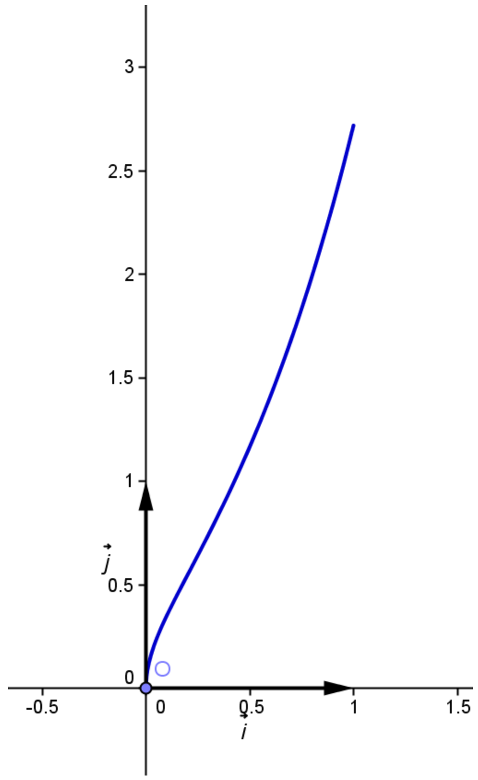
C. Lainé

Exercice 4 (3 points)

Soit h la fonction définie sur l'intervalle **R** par $h(x) = 2^x - 1$.
Dresser le tableau de variations de h.

Exercice 5 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \sqrt{x}e^x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.



Cette courbe engendre en tournant autour de l'axe (Ox) un volume de révolution.
Calculer à l'aide d'une intégration par parties le volume engendré par cette portion de courbe.

Exercice 6 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1) Montrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.

2) On admettra que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$.

a) En déduire que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$.

b) Déterminer un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.