

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Fonctions puissances et calcul intégral

Le 9 avril 2010

Exercice 1

a) Soit f la fonction définie sur $[1 ; 2]$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$.

Posons $u(x) = x^2 - 2x + 2$, alors $u'(x) = 2x - 2$. D'où $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}$. De plus, $u(x)$ est strictement positif sur $[1 ; 2]$.

Alors la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{2} \ln(u(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive de f sur

$[1 ; 2]$. D'où $A = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} dx = [F(x)]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

Par conséquent, $A = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln 2$.

b) Soit f la fonction définie sur $[1 ; e]$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t}$.

Posons $u(t) = \ln t$, alors $u'(t) = \frac{1}{t}$. D'où $f(t) = \frac{1}{t} \times \ln t = u'(t) \times u(t)$.

Alors la fonction F définie par : $F(t) = \frac{1}{2} (u(t))^2 = \frac{1}{2} (\ln t)^2$ est une primitive de f sur $[1 ; e]$.

D'où $B = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt = [F(t)]_1^e = F(e) - F(1) = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, $B = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}$.

c) Soit f la fonction définie sur $[1 ; 2]$ par $f(x) = 2e^{3x}$.

Posons $u(x) = 3x$, alors $u'(x) = 3$. D'où $f(x) = 2 \times \frac{1}{3} \times 3e^{3x} = \frac{2}{3} \times 3e^{3x} = \frac{2}{3} \times u'(x) \times e^{u(x)}$.

Alors la fonction F définie par : $F(x) = \frac{2}{3} e^{u(x)} = \frac{2}{3} e^{3x}$ est une primitive de f sur $[1 ; 2]$.

D'où $C = \int_1^2 2e^{3x} dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} e^6 - \frac{2}{3} e^3 = \frac{2}{3} e^3 (e^3 - 1)$.

Par conséquent, $C = \int_1^2 2e^{3x} dx = \frac{2}{3} e^3 (e^3 - 1)$.

Exercice 2 (France, juin 2007)

1) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$, on a :

$(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions u , u' , v et v' étant continues sur $[a ; b]$, $u'v$, uv' et donc $(uv)'$ le sont également.

Alors : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Une des primitives de $(uv)'$ est la fonction uv donc : $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$; d'où

$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

2) a) • Faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u'(x) = e^x, \text{ alors : } u(x) = e^x \\ v(x) = \sin x \quad v'(x) = \cos x \end{aligned}$$

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; \pi]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$I = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - J = \left[e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0 \right] - J = 0 - 0 - J.$$

Par conséquent, $I = -J$.

• Faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u'(x) = \sin x, \text{ alors : } u(x) = -\cos x \\ v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x \end{aligned}$$

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; \pi]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$I = \left[-e^x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cos x \, dx = \left[-e^x \cos x \right]_0^\pi + J = \left[-e^\pi \cos \pi + e^0 \cos 0 \right] + J = e^\pi + 1 + J$$

Par conséquent, $I = J + e^\pi + 1$.

b) D'après la question précédente, on est à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} I = -J \\ I = J + e^\pi + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ -2J = e^\pi + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ J = \frac{e^\pi + 1}{-2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{e^\pi + 1}{2} \\ J = -\frac{e^\pi + 1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3 (Pondichéry, avril 2009)

1) Soit un réel x positif. $f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

Posons $X = x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$

On sait que « l'exponentielle de X l'emporte sur la puissance de X , alors $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (par produit de limites).

2) $\mathcal{A}(a) = \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a xe^{-x^2} \, dx = \int_0^a -\frac{1}{2}(-2xe^{-x^2}) \, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}$.

Par conséquent, $\mathcal{A}(a) = \frac{1 - e^{-a^2}}{2}$ unités d'aire.

3) $\lim_{a \rightarrow +\infty} (-a^2) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, alors $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} = 0$ (limite d'une fonction composée).

Donc, par produit de limites, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

1) • $h = u - 1$ avec $u(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$.

Comme la fonction u est dérivable sur \mathbf{R} , alors h est dérivable sur \mathbf{R} ; et pour tout réel x , $h' = u'$ avec $u'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2}$.

On en déduit que $h'(x) > 0$ pour tout réel x . Par suite, **h est strictement croissante sur \mathbf{R} .**

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ (limite d'une fonction composée).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln 2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ (limite d'une fonction composée).

• On en déduit le tableau de variations de h :

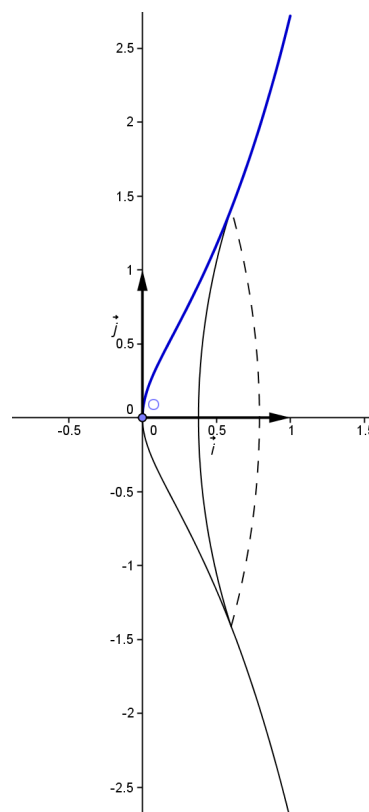
x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
h	0	$+\infty$

Exercice 5

Soit $S(x)$ l'aire de la section du volume engendré par un plan orthogonal à l'axe (Ox) .

Alors $V = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 x e^{2x} dx$.

Posons : $u'(x) = e^{2x}$, alors : $u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$
 $v(x) = x$ $v'(x) = 1$



Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; 1]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$\int_0^1 xe^{2x} dx = \left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^2 - 0 \right) - \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

Par conséquent, $V = \frac{\pi}{4} (e^2 + 1)$.

Exercice 6 (Polynésie, juin 2008)

1) Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x$.

On remarque que $g = \ln(u) - v$ avec $u(x) = 1+x$ et $v(x) = x$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

De plus, la fonction v est dérivable sur $[0 ; +\infty[$; par suite, g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

Alors $g' = \frac{u'}{u} - v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

Donc $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$.

Comme $1+x > 0$ et $-x \leq 0$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$, alors $g'(x) \leq 0$.

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Or $g(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, d'où $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$.

Par conséquent, **pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$** .

2) a) D'après l'énoncé, on peut écrire que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

En remplaçant x par e^{-x} dans l'inégalité précédente, on obtient que, **pour tout réel x de**

$[0 ; +\infty[$, $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$.

b) D'après la question précédente, en utilisant la propriété du respect de l'ordre par

l'intégration, on obtient l'inégalité suivante : $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$.

Or $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = (-e^{-1}) - (-e^0) = 1 - \frac{1}{e}$ et

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1 = (-\ln(1+e^{-1})) - (-\ln(1+e^0)) = \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

Par conséquent, $\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1 - \frac{1}{e}$.