

## EXERCICE

***Théorème des valeurs intermédiaires***

***Terminale S***

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

- 1) a) Étudier les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) Déterminer les variations de la fonction  $f$ , puis dresser son tableau de variations.
- 2) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0,5$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbf{R}$ .  
b) Montrer que  $f(x) = 0,5$  équivaut à  $e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .
- 3) L'objectif de la question est de déterminer une valeur approchée, à  $10^{-5}$  près, de cette solution en utilisant la méthode de dichotomie.
  - a) Justifier que  $\alpha$  appartient à  $[0 ; 1]$ .
  - b) Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  issues du procédé d'encadrement par dichotomie de la solution de l'équation  $f(x) = 0,5$  sont définies par la donnée de  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$  par :

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0,5, \text{ alors } \begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \\ &\bullet \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0,5, \text{ alors } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = v_n \end{cases} \end{aligned}$$

À l'aide d'un tableur, programmer les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , avec  $0 \leq n \leq 20$ , et en déduire un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-5}$  près.

Indication : on utilisera la fonction **SI(test logique ; valeur si vrai ; valeur si faux)** du tableur.