

NOMBRES COMPLEXES

Terminale S

Sujets de Bac

Exercice 1 (Polynésie, septembre 2006)

1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives a , b et c . Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B .

a) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

b) Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\frac{z-3}{z-5+2i}$.

c) Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2) Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2 - i$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r . Déterminer une équation paramétrique de Γ' .

Exercice 2 (Liban, juin 2005)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 0,5 cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Placer les points A , B , C , A' , B' et C' dans le repère donné.

2) On appelle a' , b' et c' les affixes respectives des points A' , B' et C' .

a) Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.

b) Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est un point de la droite (BB') .

c) On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en O .

3) On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a) Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left| (a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j \right| = \left| a + bj^2 + cj \right| = 22.$$

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z , $|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$.
 Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice 3 (Antilles, juin 2005)

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P . Soit A le point d'affixe 1; soit B le point d'affixe -1 .

Soit F l'application de P privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \frac{-1}{z}$.

1) a) Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F . Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b) On note C_1 le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de C_1 par l'application F .

2) a) Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F . Calculer l'affixe de K' .

b) Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de C_2 par l'application F .

3) On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a) Montrer que $z' + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$. En déduire que : $|z' + 1| = |z'|$.

b) Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi; \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du 3) a).

Exercice 4 (Pondichéry, avril 2005)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $-2 + 2i$ et par (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1) Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2) Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i}$. Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C) .

3) Sur le cercle (C) , on considère le point E , d'affixe z_E , tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$.

a) Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4) Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$.

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat.