

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE $Y' = aY + b$

Applications

Terminale S

1. Utilisation en Physique : intensité d'un courant

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E (en volts) et une bobine de résistance R (en ohms) et d'inductance L (en henrys). À l'instant t (en secondes), on note $i(t)$ l'intensité en ampères, du courant dans le circuit. La fonction i suit la loi :

$$Li' + Ri = E.$$

- 1) a) Résoudre cette équation différentielle.
- b) Déterminer l'expression de $i(t)$ sachant que $i(0) = 0$.

Remarque : Le quotient $\frac{L}{R}$ est homogène à une durée. $\tau = \frac{L}{R}$ est appelé la constante de temps de la bobine.

- 2) a) Étudier la limite l de i lorsque t tend vers $+\infty$.
- b) Quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa valeur limite l , l'intensité atteint-elle au bout de τ secondes ? de 5τ secondes ?
- 3) (C) est la courbe représentant i dans un repère orthogonal.
 - a) Dresser le tableau de variation de la fonction i .
 - b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
 - c) En déduire l'abscisse du point d'intersection de (T) avec la droite d'équation $y = l$.
Que remarque-t-on ?
 - d) Tracer (C) et son asymptote, dans le cas où $E = 5,1$ V, $L = 1$ H et $R = 114 \Omega$.

2. Utilisation en SVT : équation logistique

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est 1000 bactéries. Soit $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en heures). Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle :

$$N'(t) = 0,07 N (1 - 10^{-3}N) \text{ appelée équation logistique.}$$

- a) Posons $P(t) = \frac{1}{N(t)}$, $N \neq 0$. Démontrer que la fonction P vérifie l'équation différentielle :

$$P' = -0,07 P + 7 \times 10^{-5}.$$

- b) En déduire l'expression de $P(t)$, puis celle de $N(t)$.
- c) Quel est le nombre de bactéries au bout de 50 heures ?
- d) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90 % de la capacité maximale du milieu ?