

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Espace

Sujets de Bac

Exercice 1 (*Antilles, juin 2005*)

A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL) .

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L .

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points

$$A(4; 0; -3), B(2; 2; 2), C(3; -3; -1), D(0; 0; -3).$$

1) Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations $2x - 10y - 6z - 7 = 0$ et $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

2) Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3) En utilisant la partie **A** montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E . Quel est le rayon de cette sphère ?

Exercice 2 (*La Réunion, juin 2005*)

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est *orthocentrique* si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) .

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD .

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points $A(3; 2; -1)$, $B(-6; 1; 1)$, $C(4; -3; 3)$ et $D(-1; -5; -1)$.

1) a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

b) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) .

c) Calculer le produit scalaire $\overline{BH} \cdot \overline{CD}$.

d) Le tétraèdre $ABCD$ est-il orthocentrique ?

2) On définit les points $I(1; 0; 0)$, $J(0; 1; 0)$, $K(0; 0; 1)$.

Le tétraèdre $O I J K$ est-il orthocentrique ?

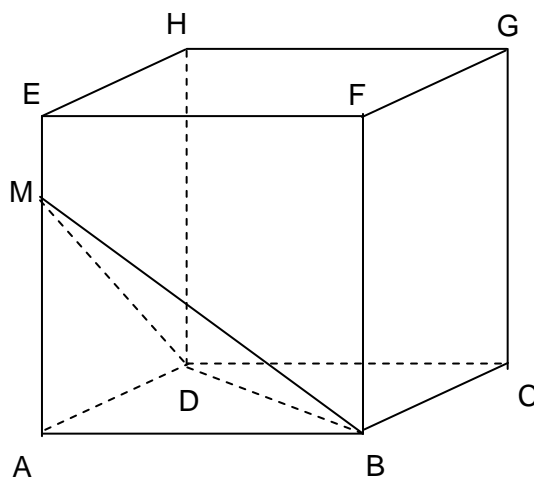
Exercice 3 (La Réunion, juin 2003)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par : $\overline{AM} = \frac{1}{a} \overline{AE}$.

- 1) Déterminer le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a .
- 2) Soit K le barycentre du système de points pondérés $\{(M, a^2); (B, 1); (D, 1)\}$.
 - a) Exprimer \overline{BK} en fonction de \overline{BM} et de \overline{BD} .
 - b) Calculer $\overline{BK} \cdot \overline{AM}$ et $\overline{BK} \cdot \overline{AD}$ puis en déduire l'égalité : $\overline{BK} \cdot \overline{MD} = 0$.
 - c) Démontrer l'égalité : $\overline{DK} \cdot \overline{MB} = 0$.
 - d) Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM .
- 3) Démontrer les égalités $\overline{AK} \cdot \overline{MB} = 0$ et $\overline{AK} \cdot \overline{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
- 4) a) Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a}$ unité d'aire.
b) Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



Exercice 4 (Nouvelle Calédonie, septembre 2003)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3; 0; 10)$, $B(0; 0; 15)$ et $C(0; 20; 0)$.

- 1) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
b) Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point $E(9; 0; 0)$.
c) Justifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- 2) Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC .
a) Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH) . En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH) .
c) Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $20x + 9y + 12z - 180 = 0$.

d) Montrer que le système
$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$
 a une solution unique.

Que représente cette solution ?

- e) Calculer la distance OH , en déduire que $EH = 15$ et l'aire du triangle EBC .
- 3) En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre $OEBC$, déterminer la distance du point O au plan (ABC) . Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2) c) ?

Exercice 5 (Centres étrangers, juin 2005)

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC , ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD .

- 1) Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD) (on pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$).
- 2) En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $ABCD$, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
- 3) On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$ et I le milieu de $[BC]$.
a) Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG .
b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

- 4) Soit H le symétrique de A par rapport à G .
a) Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
b) Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
c) En déduire que $HC = HD$.
On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est $V = \frac{1}{3}hb$.

Exercice 6 (*Cet exercice fait partie de ceux qui ont été publiés sous la responsabilité de l'Inspection Générale de Mathématiques*)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification.

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|$ est :

- a) l'ensemble vide b) un plan c) une sphère

2) On considère les points $E(0; 1; -2)$ et $F(2; 1; 0)$. Les coordonnées du barycentre G de $(E; 1)$ et $(F; 3)$ sont :

- a) $G(6; 4; -2)$ b) $G(1,5; 1; -0,5)$ c) $G(0,5; 1; 1,5)$

3) Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2 - t; y = 3t; z = -3, t \in \mathbf{R}$. On considère les points $A(2; 3; -3)$, $B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$. On a :

- a) $d = (AB)$ b) $d = (BC)$ c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$

4) Les droites de représentations paramétriques respectives

$$x = 2 + t; y = 1 - t; z = 1 + t, t \in \mathbf{R},$$

$$x = -t_0; y = -2 - 1,5t_0; z = 3 + t_0, t_0 \in \mathbf{R}$$

admettent comme point commun :

- a) $I(3; 0; 2)$ b) $J(2; 1; 1)$ c) $K(0; 2; -3)$

5) Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$x = 1; y = 1 + 2t; z = 1 + t, t \in \mathbf{R},$$

$$x = 3 - 2t_0; y = 7 - 4t_0; z = 2 - t_0, t_0 \in \mathbf{R}$$

sont :

- a) parallèles b) sécantes c) non coplanaires

6) La droite de représentation paramétrique $x = -4t; y = 1 + 3t; z = 2 + 2t, t \in \mathbf{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

- a) orthogonaux b) parallèles c) ni orthogonaux ni parallèles

7) L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

- a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

Exercice 7 (Polynésie, juin 2005)

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3; 1; 3)$ et $B(-6; 2; 1)$.

Le plan P admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 5$.

1) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|4\overline{MA} - \overline{MB}\| = 2$ est :

- a) un plan de l'espace ; b) une sphère ; c) l'ensemble vide.

2) Les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan P sont :

- a) $\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$ c) $\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

3) La sphère de centre B et de rayon 1 :

- a) coupe le plan P suivant un cercle ; b) est tangente au plan P ; c) ne coupe pas le plan P .

4) On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$

et la droite D' d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$. Les droites D et D' sont :

- a) coplanaires et parallèles ; b) coplanaires et sécantes ; c) non coplanaires.

5) L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t, t \in \mathbf{R}, \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$,

c) le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$.

Exercice 8 (Pondichéry, avril 2005)

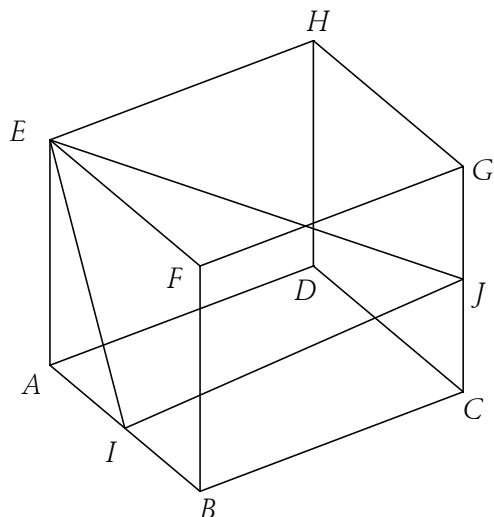
L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A , B et C de coordonnées respectives $(1; 0; 2)$, $(1; 1; 4)$ et $(-1; 1; 1)$.

- 1) a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
b) Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3; 4; -2)$. Vérifier que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2) Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
b) La droite D et le plan (ABC) sont-ils parallèles ?
- 3) Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A , B et C affectés des coefficients 1, 2 et t .
a) Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t .
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2.
Déterminer les coordonnées du point I .
Exprimer le vecteur \overrightarrow{IG} en fonction du vecteur \overrightarrow{IC} .
b) Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C . Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Exercice 9 (Amérique du Sud, novembre 2005)

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 1 point. Toute réponse erronée enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre. Le candidat est appelé à juger chacune des dix affirmations suivantes.



n°	Affirmation	Vrai ou Faux
1	$\overline{AC} \cdot \overline{AI} = \frac{1}{2}$	
2	$\overline{AC} \cdot \overline{AI} = \overline{AI} \cdot \overline{AB}$	
3	$\overline{AB} \cdot \overline{IJ} = \overline{AB} \cdot \overline{IC}$	
4	$\overline{AB} \cdot \overline{IJ} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3}$	

Exercice 10 (Métropole, juin 2004)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 1/2 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$A : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases} \quad B : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad C : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad (t \text{ réel}).$$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite (d) avec le plan P sont :

$$A : (-4; 0; 0) \quad B : \left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right) \quad C : \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad D : \left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3) La distance du point S au plan P est égale à :

$$A : \frac{\sqrt{11}}{3} \quad B : \frac{3}{\sqrt{11}} \quad C : \frac{9}{\sqrt{11}} \quad D : \frac{9}{11}$$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :

$$A : \text{au point } I(1; -5; 0). \quad B : \text{au cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

$$C : \text{au cercle de centre } S \text{ et de rayon } 2. \quad D : \text{au cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

Exercice 11 (National, septembre 2005)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère le plan P passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 5)$ et le plan R d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires.

b) Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite Δ passant par le point

$C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$.

c) Soit le point $A(5; -2; -1)$. Calculer la distance du point A au plan P , puis la distance du point A au plan R .

d) Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

2) a) Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées $(1 + 2t; 3 - t; t)$.

Déterminer en fonction de t la longueur AM . On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

b) Étudier le sens de variations de la fonction φ sur \mathbf{R} ; préciser son minimum.

c) Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Exercice 12 (Pondichéry, avril 2006)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A

Cette partie constitue une restitution organisée de connaissances.

Soient a, b, c et d des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. On considère le point I de coordonnées (x_I, y_I, z_I) et le vecteur \vec{n} de coordonnées (a, b, c) .

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan P est égale à

$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1) Soit la droite Δ passant par I et orthogonale au plan P. Déterminer en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I un système d'équations paramétriques de Δ .

2) On note H le point d'intersection de Δ et P.

a) Justifier qu'il existe un réel k tel que $\vec{IH} = k\vec{n}$.

b) Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I .

c) En déduire que $IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan Q d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1; -1; 3)$.

1) Déterminer le rayon de la sphère S.

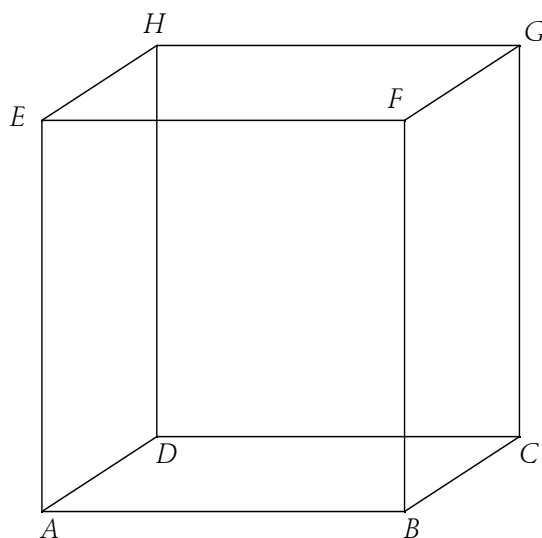
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q.

3) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q.

Exercice 13 (Asie, juin 2006)

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté sur la figure ci-dessous. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$. On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}; 1; 1\right)$.

- 1) Placer le point I sur la figure.
- 2) Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J .
Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
- 3) On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC) .
 - a) Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
 - (i) Il existe un réel k tel que $\overline{AR} = k\overline{AC}$.
 - (ii) $\overline{IR} \cdot \overline{AC} = 0$.
 - b) Calculer les coordonnées du point R .
 - c) En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \frac{\sqrt{11}}{3}$.
- 4) Démontrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(3; -3; 2)$ est normal au plan (ACI) .
En déduire une équation cartésienne du plan (ACI) .
- 5) Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\frac{5}{\sqrt{22}}$.



Exercice 14 (*Centres Etrangers, juin 2006*)

$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

Partie A : un triangle et son centre de gravité

- 1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
- 2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE .
 - a) Calculer les coordonnées de I .
 - b) Démontrer que $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
- 3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE) .

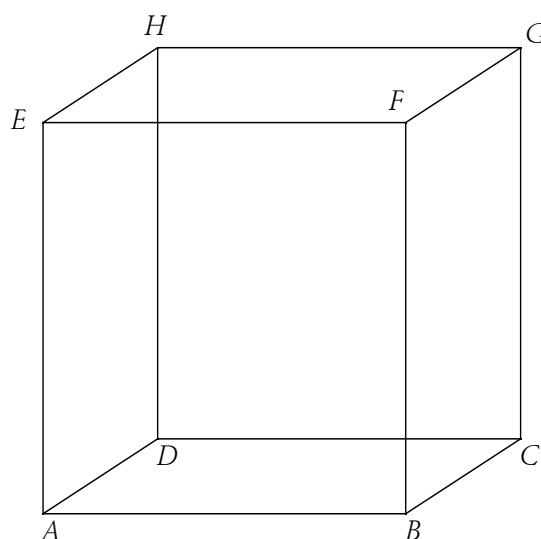
Partie B : une droite particulière

Pour tout nombre réel k , on définit deux points M_k et N_k , ainsi qu'un plan P_k de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overline{AM_k} = k \overline{AG}$;
- P_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan P_k et de la droite (BC) .

- 1) Identifier $P_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$, et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
- 2) Calcul des coordonnées de N_k .
 - a) Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.
 - b) Déterminer une équation du plan P_k dans ce repère.
 - c) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k-1; 0)$.
- 3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
- 4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
- 5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $P_{\frac{1}{3}}$. Tracer la droite

$\left(M_{\frac{1}{3}}, N_{\frac{1}{3}} \right)$ sur la même figure.



Exercice 15 (La Réunion, juin 2006)

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point. Toute réponse juste rapporte 0,5 point. Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z = 0$.

a) La distance du point O au plan P est égale à 1.

b) La distance du point O au plan P est égale à $\frac{1}{\sqrt{29}}$.

c) Le vecteur $\vec{n}\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$ est un vecteur normal au plan P.

d) Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2) On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point

$A(1; 1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -4; -2)$.

a) La droite D est parallèle au plan P.

b) La droite D est orthogonale au plan P.

c) La droite D est sécante avec le plan P.

d) Un système d'équations paramétriques de D est
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3) On désigne par E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$.

Soit le point $A(1; 1; 1)$.

a) L'ensemble E contient un seul point, le point A.

b) L'ensemble E est une droite passant par A.

c) L'ensemble E est un plan passant par A.

d) L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; -3; 2)$.

4) ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a) Le plan P contient toujours le point D.

b) Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c) Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overline{BM} \cdot \overline{BC} = \overline{BA} \cdot \overline{BC}$.

d) Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

Exercice 16 (Liban, juin 2006)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$.

1) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2) Soit (d) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC) .

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

3) Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC) .

a) Montrer que H est le barycentre de $\{(A; -2), (B; -1), (C; 2)\}$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que

$$(-2 \overline{MA} - \overline{MB} + 2 \overline{MC}) \cdot (\overline{MB} - \overline{MC}) = 0.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que

$$\| -2 \overline{MA} - \overline{MB} + 2 \overline{MC} \| = \sqrt{29}.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

e) Le point $S(-8; 1; 3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

Exercice 17 (National, juin 2006)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points $A(2; 4; 1)$,

$B(0; 4; -3)$, $C(3; 1; -3)$, $D(1; 0; -2)$, $E(3; 2; -1)$, $I\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

5) Le point I est sur la droite (AB) .

Exercice 18 (Polynésie, juin 2006)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

$A(0; 0; 2)$, $B(0; 4; 0)$ et $C(2; 0; 0)$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$, par G l'isobarycentre des points A , B et C , et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) .

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overline{MB} + \overline{MC}\| = \|\overline{MB} - \overline{MC}\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$ ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$. »

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}). \text{ »}$$

Exercice 19 (Amérique du Sud, novembre 2006)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées $(3; 1; -5)$, B de coordonnées $(0; 4; -5)$, C de coordonnées $(-1; 2; -5)$ et D de coordonnées $(2; 3; 4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » ou « FAUX ». On attribue 0,5 point par réponse correcte et on retranche 0,25 point par réponse incorrecte. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

- 1) Les points A , B et D sont alignés.
- 2) La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne $x + y = 4$.
- 3) Une équation cartésienne du plan (BCD) est $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
- 4) Les points A , B , C et D sont coplanaires.
- 5) La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD) .

6) Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \frac{7}{2} + k \\ z = -\frac{1}{2} - 9k \end{cases}, k \in \mathbf{R}.$$

Exercice 20 (National, septembre 2006)

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté ci-dessous.

Soit I le barycentre des points pondérés $(E; 2)$ et $(F; 1)$, J celui de $(F; 1)$ et $(B; 2)$ et enfin K celui de $(G; 2)$ et $(C; 1)$.

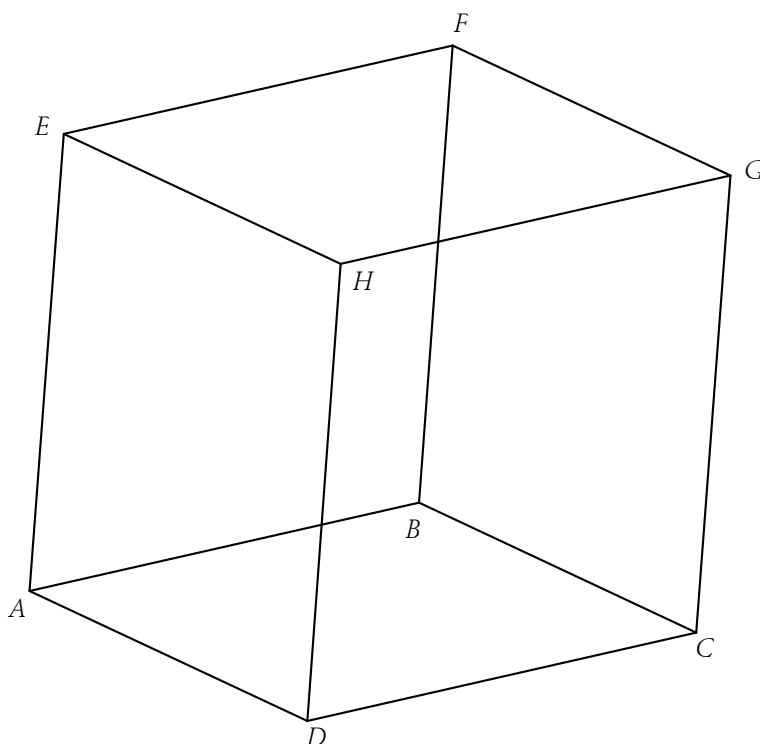
On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K . On note Γ cet ensemble.

- 1) Placer les points I, J et K sur la figure ci-dessous.
- 2) Soit Ω le point de Γ situé dans le plan (IJK) . Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant :

$$\left(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \right).$$

- 3) Donner les coordonnées des points I, J et K .
- 4) Soit $P(2; 0; 0)$ et $Q(1; 3; 3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK) .
- 5) Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$.
 - a) Démontrer que M appartient à Γ si, et seulement si, le triplet $(x; y; z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Γ ?
 - b) Vérifier que P et Q appartiennent à Γ . Tracer Γ sur la figure.
- 6) a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω .



Exercice 21 (Polynésie, septembre 2006)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1) Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2) Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2) . Montrer qu'une représentation

paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

3) Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9; -4; -1)$.

a) Vérifier que A n'appartient ni à (P_1) , ni à (P_2) .

b) Exprimer AM^2 en fonction de t .

c) Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

• Étudier les variations de f .

• Pour quel point M , la distance AM est-elle minimale ?

Dans la suite, on désignera ce point par I .

• Préciser les coordonnées du point I .

4) Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A .

a) Déterminer une équation de (Q) .

b) Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D) .

Exercice 22 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2006)

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(0; 0; 3)$, $E(2; 0; 4)$, $C(-1; 1; 2)$ et $D(1; -4; 0)$;
- les plans $(P_1) : 7x + 4y - 3z + 9 = 0$ et $(P_2) : x - 2y = 0$;
- les droites (d_1) et (d_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a	b	c	d
1) Le plan (P_1) est	le plan (ABC)	le plan (BCD)	le plan (ACD)	le plan (AED)
2) La droite (d_1) contient	le point A	le point B	le point C	le point D
3) Position relative de (d_1) et de (d_2)	(d_1) est strictement parallèle à (P_1)	(d_1) est incluse dans (P_1)	(d_1) coupe (P_1)	(d_1) est orthogonale à (P_1)
4) Position relative de (d_1) et de (d_2)	(d_1) est strictement parallèle à (d_2)	(d_1) et (d_2) sont confondues	(d_1) et (d_2) sont sécantes	(d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
5) L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (D) passant par $A(0; 0; 3)$ et dont un vecteur directeur est

$\vec{u}(1; 0; -1)$ et la droite (D') passant par $B(2; 0; 4)$ et dont un vecteur directeur est

$\vec{v}(0; 1; 1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D') , de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1) On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D') définis par $\overline{AM} = a\vec{u}$ et $\overline{BM'} = b\vec{v}$, où a et b sont de nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M , de M' puis du vecteur $\overline{MM'}$ en fonction de a et b .

2) Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D') , si, et seulement si, le couple $(a ; b)$ est solution du système $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$.

3) Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M' , que nous noterons ici H et H' , tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D') .

Montrer que $HH' = \sqrt{3}$ unités de longueur.

4) On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D') .

a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1), démontrer que

$$MM'^2 = (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3.$$

b) En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H' .

Exercice 23 (Nouvelle-Calédonie, mars 2007)

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Question de cours

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2) On considère les points $A(1; 2; -3)$, $B(-3; 1; 4)$ et $C(2; 6; -1)$.

a) Montrer que les points A , B et C déterminent un plan.

b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c) Soit I le point de coordonnées $(-5; 9; 4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite \mathcal{D} passant par I et perpendiculaire au plan (ABC) .

d) Déterminer les coordonnées du point J , intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC) .

e) En déduire la distance du point I au plan (ABC) .

Exercice 24 (Antilles, juin 2007)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3; 0; 6)$ et $I(0; 0; 6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I .

On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1) Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

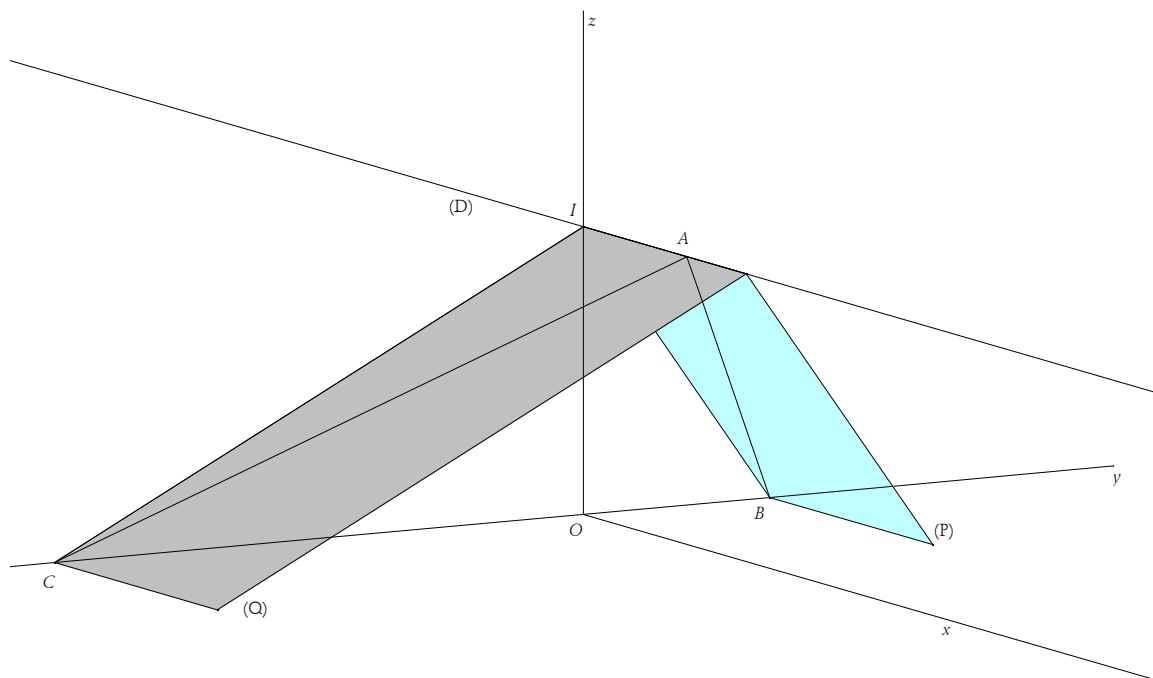
2) Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D) .

3) Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $(O; \vec{j})$ et déterminer les coordonnées des points B et C , intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $(O; \vec{j})$.

4) Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal \overline{AC} est $x + 4y + 2z - 12 = 0$.

5) Donner une représentation paramétrique de la droite (OA) . Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6) Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



Exercice 25 (France, juin 2007)

L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$. Soit A le point de coordonnées $(0; 1; 1)$.

1) Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un}$$

nombre réel. Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d) .

3) Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P') .

4) En déduire la distance du point A à la droite (d) .

Exercice 26 (Polynésie, juin 2007)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A\left(\frac{2}{3}; -3; 2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}; 0; -4\right)$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1) Soit E le barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(B; 1)$.

a) Calculer les coordonnées de E .

b) Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\|2\overline{MA} + \overline{MB}\| = 3\|\overline{MO}\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c) Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.

2) a) Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P) .
En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b) Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.

En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 4\sqrt{3} - 1\right)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID) .

b) En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Exercice 27 (Amérique du Sud, septembre 2007)

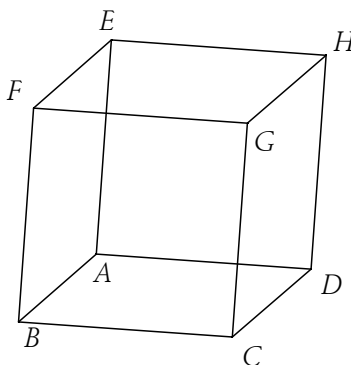
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) On considère le point A de coordonnées $(-2; 8; 4)$ et le vecteur \vec{u} de coordonnées $(1; 5; -1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
- 2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d') .
Montrer que le vecteur de coordonnées $(2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de (d') .
- 3) Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
- 4) On considère le point H de coordonnées $(-3; 3; 5)$ et le point H' de coordonnées $(3; 0; -4)$.
 - a) Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d') .
 - b. Démontrer que la droite (HH') est perpendiculaire aux droites (d) et (d') .
 - c) Calculer la distance entre les droites (d) et (d') , c'est-à-dire la distance HH' .
- 5) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overline{MH'} \cdot \overline{HH'} = 126$.

Exercice 28 (Polynésie, septembre 2007)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overline{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overline{DC}$, $\vec{k} = \frac{1}{3}\overline{DH}$.



- 1) a) Donner les coordonnées des points A, C, E .
b) Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C, 2); (E, 1)\}$.
c) Déterminer les coordonnées des vecteurs \overline{AE} et \overline{DL} .
- 2) Soit $(a; b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overline{AM} = a \overline{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overline{DN} = b \overline{DL}$.
 - a) Montrer que le vecteur \overline{MN} est orthogonal aux vecteurs \overline{AE} et \overline{DL} si et seulement si le couple $(a; b)$ vérifie le système
$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$
.
 - b) En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL) .
 - c) Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0 .

Exercice 29 (*Antilles, septembre 2007*)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur. Soit l'événement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches. Calculer la probabilité de l'événement G .

Partie B

On note n , b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1) On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n , b et r de l'événement G .

Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210} [n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$.

2) Le but de cette question est de déterminer n , b et r de sorte que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points N , B et R de coordonnées respectives $(15; 0; 0)$, $(0; 15; 0)$ et $(0; 0; 15)$ et soit M le point de coordonnées $(n; b; r)$. On pourra se reporter à la figure ci-dessous.

a) Justifier qu'une équation du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.

b) En déduire que le point M est un point du plan (NBR) .

c) Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210} (OM^2 - 15)$.

d) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR) . Déterminer les coordonnées du point H .

e) En déduire les valeurs de n , b et r afin que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.

Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\frac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit égale à $\frac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ. S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et k .

2) Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.

Exercice 30 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2007)

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB , OBC , OCA sont rectangles en O).
On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) .

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

- 1) a) Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ? Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
b) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On peut démontrer de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.
c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?
- 2) L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.
 - a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par O et orthogonale au plan (ABC) .
 - c) Démontrer que le plan (ABC) et la droite (d) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.
- 3) a) Calculer la distance du point O au plan (ABC) .
b) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC .
c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 31 (Nouvelle-Calédonie, mars 2008)

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit t un nombre réel.

On donne le point $A(-1; 2; 3)$ et la droite (D) de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite (D) .

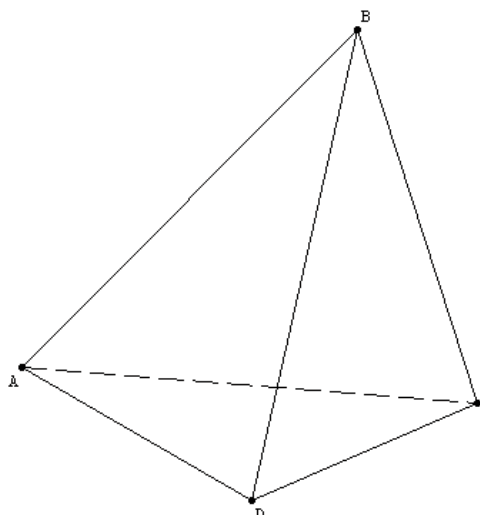
- 1) a) Donner une équation cartésienne du plan (P) , perpendiculaire à la droite (D) et passant par A .
b) Vérifier que le point $B(-3; 3; -4)$ appartient à la droite (D) .
c) Calculer la distance d_B entre le point B et le plan (P) .
d) Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB . En déduire la valeur exacte de d .
- 2) Soit M un point de la droite (D) . Exprimer AM^2 en fonction de t . Retrouver alors la valeur de d .

Exercice 32 (Pondichéry, avril 2008)

On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D .



1) Montrer que les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équi-facial, car ses faces sont isométriques).

2) a) Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3) a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB) . Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD) .

c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Exercice 33 (*Amérique du Nord, mai 2008*)

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

- 1) Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
- 2) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives : $A(3; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 4)$ et $D(-5; 0; 1)$.

- 1) a) Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .
b) Déterminer une équation du plan (ABC) .
- 2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , orthogonale au plan (ABC) et passant par D .
b) En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .
c) Calculer la distance du point D au plan (ABC) .
d) Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la **partie A**.

Exercice 34 (Antilles-Guyane, juin 2008)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :
$$\begin{cases} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$$
 est :

Réponse A : l'ensemble vide

Réponse B : une droite

Réponse C : un plan

Réponse D : réduit à un point.

2) Les droites de représentations paramétriques respectives :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t, t \in \mathbf{R} \text{ et} \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 - t', t' \in \mathbf{R}, \text{ sont :} \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$$

Réponse A : parallèles et distinctes

Réponse B : confondues

Réponse C : sécantes

Réponse D : non coplanaires

3) La distance du point $A(1; -2; 1)$ au plan d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ est égale à :

Réponse A : $\frac{3}{11}$

Réponse B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$

Réponse C : $\frac{1}{2}$

Réponse D : $\frac{8}{\sqrt{11}}$.

4) Le projeté orthogonal du point $B(1; 6; 0)$ sur le plan d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ a pour coordonnées :

Réponse A : $(3; 1; 5)$

Réponse B : $(2; 3; 1)$

Réponse C : $(3; 0; 2)$

Réponse D : $(-2; 3; -6)$

Exercice 35 (Antilles-Guyane, juin 2008)

A. Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fautive la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

* $P_1 \cap P_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans P_1 et P_2 .

* L'écriture $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ signifie que les plans P_1 et P_2 n'ont aucun point commun.

1) Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient : $P_1 \cap P_3 = \emptyset$.

2) Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors on peut conclure que P_1, P_2 et P_3 sont tels que : $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$.

3) Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient : $P_2 \cap P_3 = \emptyset$.

4) Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant : $P_1 \cap D = \emptyset$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, alors on peut conclure que : $P_2 \cap D = \emptyset$.

B. Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

* P_1 d'équation $x + y - z = 0$,

* P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,

* P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1) Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ .

2) En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Exercice 36 (*Centres Étrangers, juin 2008*)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(0; -2; 3)$, $D(1; 1; -2)$ et le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots VRAI ou FAUX à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

- 1) Affirmation 1 : les points A , B et C définissent un plan.
- 2) Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan (P) .
- 3) Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
- 4) Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :
$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k, k \in \mathbf{R} \\ z = 3 - 4k \end{cases}$$
- 5) Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- 6) Affirmation 6 : la distance du point C au plan (P) est égale à $4\sqrt{6}$.
- 7) Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan (P) .
- 8) Affirmation 8 : le point $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .

Exercice 37 (*France, juin 2008*)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 1)$ et $C(3; -1; 2)$.

- 1) a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.
- 2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (D) dont une

représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- 3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) ?
- 4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite (D) .

Exercice 38 (Polynésie, septembre 2008)

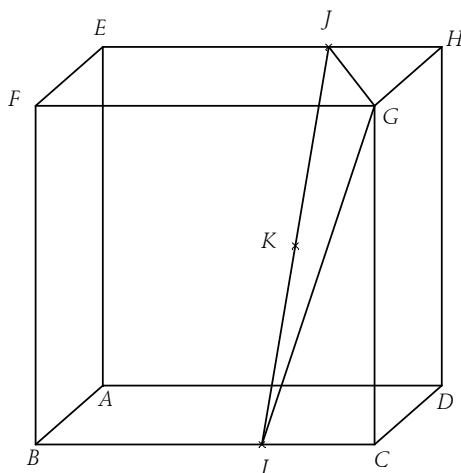
On donne la propriété suivante : « Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On a placé :

- les points I et J tels que $\overline{BI} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ et $\overline{EJ} = \frac{2}{3}\overline{EH}$;
- le milieu K de $[IJ]$.

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) .



PARTIE A

1) Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F . En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK) .

3) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP) .

4) a) Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

b) En déduire que les points F, P et K sont alignés.

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB) . On note $(x; y; 0)$ les coordonnées du point N .

1) Donner les coordonnées des points F, G, I et J .

2) a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) .

b) Exprimer les produits scalaires $\overline{GN} \cdot \overline{FI}$ et $\overline{GN} \cdot \overline{FJ}$ en fonction de x et y .

c) Déterminer les coordonnées du point N .

3) Placer alors le point P sur la figure.

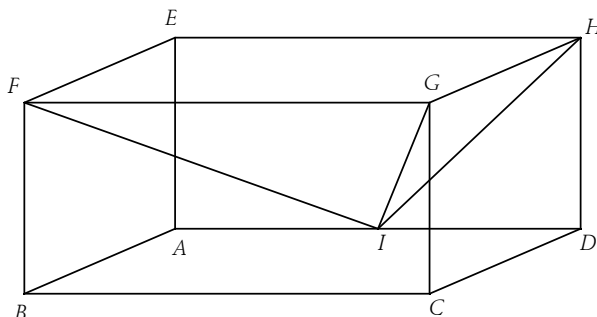
Exercice 39 (Amérique du Sud, novembre 2008)

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que :

$$AB = 1, AD = 2 \text{ et } AE = 1.$$

On appelle I le milieu de $[AD]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.



- 1) Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H .
- 2) a) Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\frac{1}{3}$.
b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I .
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH) .
- 3) Soit le vecteur \vec{n} de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.
a) Montrer que le vecteur \vec{n} est normal au plan (FIH) .
b) En déduire une équation cartésienne du plan (FIH) .
c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH) .
- 4) a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH) .
- 5) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.
Soit \mathcal{S} la sphère de centre G passant par K .
Quelle est la nature de l'intersection de \mathcal{S} et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)