

SCHEMA DE BERNOULLI ET LOI BINOMIALE

Lois de probabilités

Sujets de Bac

Exercice 1 (*Nouvelle-Calédonie, mars 2008*)

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.

- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a) Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2) Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3) L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Exercice 2 (Asie, juin 2007)

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité » .

1) Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b) Démontrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{1}{4}$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2) Calcul de probabilités.

a) Démontrer que $P(S) = 0,934$.

b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3) Étude d'une variable aléatoire B .

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B .

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .

4) Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Exercice 3 (Polynésie, juin 2007)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».

L'événement contraire d'un événement E est noté \bar{E} . La probabilité d'un événement est notée $p(E)$.

Partie A

1) Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3) Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4) Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paye 1 euro par partie ;
- si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;
- si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

1) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 4 (France, septembre 2006)

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A. Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i -ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i -ème jour ».

1) Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2) Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$.

3) Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B. On suppose maintenant que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1) Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.

2) On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

b) Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n

touristes vaut : $p = \frac{n}{2^{n-1}}$.

c) Application numérique : lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.