LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

Probabilités	*Sujets de Bac*

Exercice 1 (*Centre étranger Groupe 1, juin 2003*)

Une entreprise dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc, …
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par $p(D \leq \mathrm{A}) = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{82} \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\, \mathrm{d}x$.

Dans tout l'exercice les résultats numériques seront arrondis au millième.

1) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a) comprise entre 50 et 100 km ;
   b) supérieure à 300 km.
2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des prochains 25 kilomètres ?
3) Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.
   a) Au moyen d'une intégration par partie, calculer $\mathrm{I}(\mathrm{A}) = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{82} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\, \mathrm{d}x$; où A est un nombre réel positif.
   b) Calculer la limite de $\mathrm{I}(\mathrm{A})$ lorsque A tend vers + ∞. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).
4) L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient l'incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

d est un nombre réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   a) Montrer que X_d suit une loi Binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Exercice 2 (*La Réunion, juin 2003*)

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a., *b., c., d.* .
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX »dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1) Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue *n* tirages indépendants et avec remise, *n* désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.	*a.* X suit une loi binomiale de paramètres *n* et $\frac{1}{4}$. *b.* P(X = 0) = $\frac{1}{2^{2n}}$ *c.* P (X < 5) = 1 – P (X > 5) *d.* E(X) = 0,75 *n*
2) Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. **Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :** • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs. • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».	*a.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=1{,}01$ *b.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=P(T)$ *c.* P(T) = 2, 97.10^{-2} *d.* Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3) La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :	*a.* La densité de probabilité de Y est la fonction *f* définie sur [0 ; + ∞[par : $f(t)=e^{-0{,}01t}$. *b.* Pour tout réel t positif, $P(Y\leq t)=1-e^{-0{,}01t}$. *c.* La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16. *d.* Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Exercice 3 (*Cet exercice fait partie de ceux qui ont été publiés sous la responsabilité de l'Inspection Générale de Mathématiques*)

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur. Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note :
D l'événement « l'ampoule est défectueuse »,
F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »,
F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur » et
F_3 l'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur ».

a) Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(\mathrm{D})$.
b) Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F1})$ qu'elle provienne du premier fournisseur ?
Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F1})$.
2) On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.
On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de R.
3) La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = 1/50\,000 = 2.10^{-5}$.

Selon cette loi, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $P(T \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

a) Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1.
b) Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2.
c) Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3.

Exercice 4 (*France métropolitaine, juin 2004*)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est
$p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.
Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^{\mathrm{A}} \lambda e^{-\lambda x} dx$.

a) Montrer que $\int_0^{\mathrm{A}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda \mathrm{A} e^{-\lambda \mathrm{A}} - e^{-\lambda \mathrm{A}} + 1}{\lambda}$.
b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice 5 (*Liban, juin 2004*)

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.
On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} *près*.

1) On interroge au hasard au membre du personnel de cet hôpital.
  a) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
  b) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
  c) On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT. En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2) Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur [0 ; 1].
On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?

3) Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

Exercice 6 (*Polynésie, juin 2004*)

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1) Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5) Combien l'établissement devait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 7 (*La Réunion, juin 2004*)

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, contenant 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1) On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1.
La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$	**B** : $\dfrac{3}{120}$	**C** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$	**D** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$

2) Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

A : 0,98	**B** : $\dfrac{0,4\times0,95}{0,6\times0,98+0,6\times0,02}$	**C** : $0,6\times0,98$	**D** : $\dfrac{0,6\times0,98}{0,6\times0,98+0,4\times0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot ménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre λ = 0,0005).
Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p\left([0\,;t[\right)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx\,.$$

1) La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**B** : $e^{\frac{5}{4}}$	**C** : $1-e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**D** : $e^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$

2) La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule
$E=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx\right)$.

a) L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$ est égale à :

A : $\lambda\dfrac{t^2}{2}e^{-\lambda t}$	**B** : $-te^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$	**C** : $\lambda te^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda$	**D** : $te^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$

b) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500	**B** : 2 000	**C** : 2531,24	**D** : 3 000

Exercice 8 (*Sujet National, septembre 2004*)

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1) Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;
A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;
B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;
B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;
C1 : « la particule entre dans K1 » ;
C2 : « la particule entre dans K2 ».
2) On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5730 ans.

1) Calculer λ ; on prendra une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.
2) Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3) Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

[1] Temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

<u>Exercice 9</u> (*Amérique du Sud, novembre 2005*)

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.
On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.
Alain achète 50 composants.

1) Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3) Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
  a) si ce composant est défectueux ;
  b) si ce composant n'est pas défectueux.
Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2) Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0{,}02e^{-5\times 10^{-4}t} + 0{,}98e^{-10^{-4}t}.$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3) Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire : Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

Pour $0 \leq a \leq b$, $P([a\,;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx$; pour $c \geq 0$, $P\left([\,c\,;+\infty\,[\right) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx$.

Exercice 10 (*Nouvelle-Calédonie, novembre 2005*)

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.
La partie I est la démonstration d'un résultat de cours. La partie II est un Q.C.M.

Partie I : Question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie II est ramenée à zéro.

1) Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

A	$\frac{75}{512}$	B	$\frac{13}{56}$	C	$\frac{15}{64}$	D	$\frac{15}{28}$

2) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

A	$\frac{1}{120}$	B	$\frac{3}{40}$	C	$\frac{1}{12}$	D	$\frac{4}{40}$

3) Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

A	2	B	13	C	16	D	17

4) La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ avec $\lambda = \frac{1}{6}$, où t désigne le temps exprimé en minutes.
Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes ?

A	0,2819	B	0,3935	C	0,5654	D	0,6065

Exercice 11 (*Antilles, juin 2006*)

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$. La courbe donnée en annexe 1 représente la fonction densité associée.

1) Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$.
2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

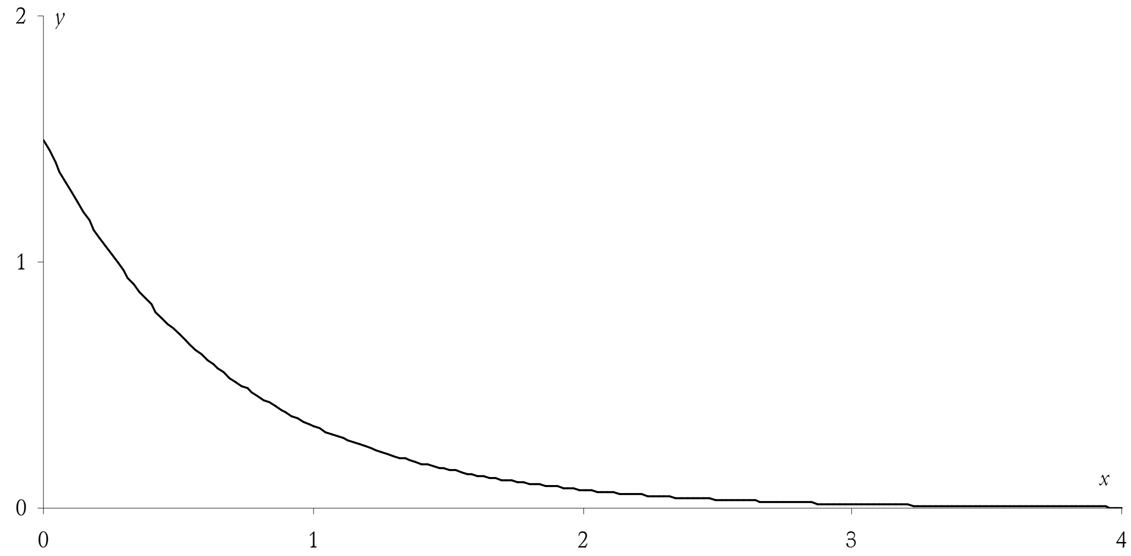
On pose λ = 1,5.

1) Calculer $P(X \leq 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2) Calculer $P(X \leq 2)$.
3) Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.
4) Calculer l'intégrale $\int_0^x 1{,}5te^{-1{,}5t} dt$. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ = 1,5.
Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1) On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2) On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?



Exercice 12 (*Liban, juin 2006*)

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx .$$

1) Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.
2) À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3) Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0{,}4}$.
4) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice 13 (*Nouvelle-Calédonie, mars 2007*)

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$	b) $\dfrac{9}{8}$	c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$	d) $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a) 0	b) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$	c) $\dfrac{23}{128}$	d) $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x)=x+m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque :

a) $m=-1$	b) $m=\dfrac{1}{2}$	c) $m=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$	d) $m=\mathrm{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a) $1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	c) $\dfrac{1}{5\mathrm{e}}$	d) $\dfrac{1}{0{,}2}(\mathrm{e}-1)$

Exercice 14 (*Nouvelle-Calédonie, novembre 2007*)

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;
– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1) a) Dessiner un arbre pondéré.
b) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.
c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*

2) Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3) La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
a) Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.
b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?