PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Cours	*Applications*

Exercice 1

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1) Définir l'ensemble Ω des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.
2) Quelle est la probabilité des événements suivants :
   a) A : la carte tirée est le roi de cœur,
   b) B : la carte tirée est un as,
   c) C : la carte tirée est rouge,
   d) D : la carte tirée est un as ou une carte rouge.

Exercice 2

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher.

1) On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.
   a) Définir l'ensemble Ω des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.
   b) Les 20 boules sont de différentes couleurs : 8 jaunes, 6 rouges, 4 vertes et 2 bleues.
   Quelle est la probabilité de chacun des événements :
   - la boule tirée est jaune,
   - la boule tirée est rouge ou verte,
   - la boule tirée n'est pas noire.
2) On considère maintenant l'épreuve qui consiste à tirer simultanément au hasard deux boules de cette même urne. Quelle est la probabilité de chacun des événements :
   - les deux boules tirées sont jaunes,
   - on a tiré une boule rouge et une boule verte.

Exercice 3

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un est rouge, l'autre est blanc.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir exactement un 1 »
B : « obtenir au moins un 1 »
C : « obtenir au plus un 1 »
D : « le plus petit des deux numéros est 4 »
E : « la somme des deux numéros est égale à 7 »
F : « la somme des deux numéros est strictement supérieure à 10 ».

Exercice 4

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tirage le nombre :

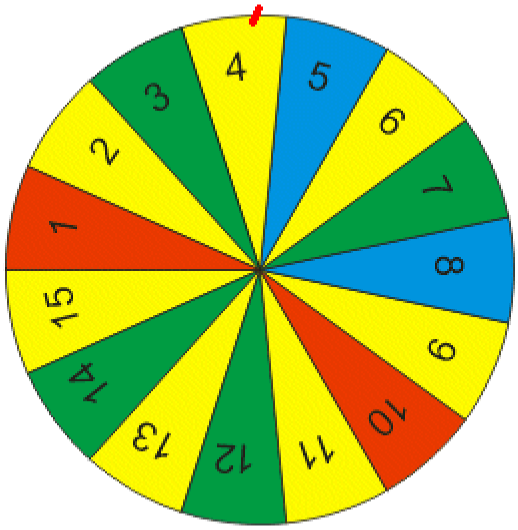
- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 0 si on tire les numéros 2, 3, 4 ou 5 ;
- 10 si on tire le numéro 6.

1) Définir l'ensemble des éventualités Ω et donner l'ensemble X(Ω).
2) On suppose que le dé est parfaitement équilibré.
   Donner la loi de probabilité de X.
3) On suppose que le dé est truqué et que les probabilités d'apparition des numéros 1, 2 , 3, 4 et 5 sont toutes les cinq égales à 0,12.
   Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 5

On considère une roue partagée en 15
secteurs angulaires numérotés de 1 à 15. Ces

secteurs sont de différentes couleurs comme sur le dessin ci-contre.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à faire tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.
L'ensemble des éventualités est :
$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 \}$



1) Déterminer la probabilité des événements :
   E **:** «le numéro est multiple de 5» ;
   F : «le numéro n'est pas multiple de 5» ;
   G : «le numéro est pair et inférieur à 11» ;
   $E \cap G$; $E \cup G$.

2) À chaque éventualité, on associe la couleurdu secteur correspondant. On définit ainsi une variable aléatoire C. Donner la loi de probabilité de C.

Exercice 6
On jette simultanément deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
1) Définir l'ensemble des éventualités Ω et la loi de probabilité sur Ω.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6 ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros dont la somme est 4 ?
4) On appelle S la somme des deux numéros obtenus.
Donner la loi de probabilité de S. Calculer l'espérance mathématique de S.

Exercice 7
On tire au hasard et simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.
Définir l'ensemble des éventualités □ et la loi de probabilité sur Ω.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe le nombre d'as obtenus.
Déterminer $X(\Omega)$ et donner la loi de probabilité de X .
Conjecturer la valeur de l'espérance mathématique de X puis calculer cette espérance.

Exercice 8
On jette une pièce de monnaie.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre 3 au tirage de pile et 5 au tirage de face.
1)On suppose la pièce parfaitement équilibrée, déterminer alors l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
2) La pièce n'est peut-être pas parfaitement équilibrée, on note p_0 la probabilité d'obtenir face.
   a) Déterminer en fonction de p_0 l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
   b) Démontrer que l'on a $3 \leq E(X) \leq 5$.
   c) Déterminer les valeurs de p_0 pour lesquelles l'écart-type est maximum ou minimum.
   À quelles situations cela correspond-t-il ?

Exercice 9
On considère le jeu suivant :
On jette un première fois une pièce de monnaie ;
si on obtient face, on gagne 4 euros et le jeu s'arrête ;
si on obtient pile, on gagne 1 euro et le jeu se poursuit ;
on jette alors une deuxième fois la pièce ;
si on obtient face on gagne 2 euros et le jeu s'arrête ;

si on obtient pile on gagne 1 euro et le jeu se poursuit ;
on jette alors une troisième et dernière fois la pièce ;
si on obtient face, on gagne 2 euros ;
si on obtient pile, on gagne 1 euro ;

1) Représenter le jeu par un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 4 euros à la fin du jeu ?

Exercice 10

On soumet, à la naissance, une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique A.
La probabilité qu'un enfant ayant le caractère A ait un test positif est 0,99.
La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère A ait un test négatif est 0,98.
1) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1000 était porteur du caractère A.
   a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
   b) Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.
   c) Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A. Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.
2) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 100 était porteur du caractère A.

Exercice 11

Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile.
On a constaté que :
• lorsqu'on choisit au hasard un véhicule du parc automobile la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de 0,67 ;
• lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de 0,48 ;
• lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de 0,75.
1) Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage.
Traduire le résultat en terme de pourcentages.
2) Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage. Traduire le résultat en terme de pourcentages.

Exercice 12

Lors d'une journée "portes ouvertes" dans un commerce, on remet à chaque visiteur un ticket numéroté qui permet de participer à une loterie. Lorsqu'un visiteur arrive 3 cas peuvent se présenter :
• le visiteur est reconnu comme client habituel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 0 ;
• le visiteur est reconnu comme client occasionnel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 1 ;
• le visiteur n'est pas reconnu et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 5 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 0 gagne un cadeau est de 0,5 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 1 gagne un cadeau est de 0,1 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 5 gagne un cadeau est de 0,01.
Parmi les visiteurs 15% sont reconnus comme clients habituels et 20% comme clients occasionnels.
On choisit un visiteur au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un cadeau ?
Un visiteur a gagné un cadeau. Quelle est la probabilité qu'il ait été reconnu comme client habituel ?

Exercice 13

1) On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère l'événement C : « tirer un cœur » et l'événement A : « tirer un as ».
Les événements A et C sont-ils indépendants ?

2) On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
   a) On considère l'événement C' : « tirer deux cœurs » et l'événement A' : « tirer deux as ».
   Les événements A' et C' sont-ils indépendants ?
   b) On considère C" : « tirer un cœur et un seul » et A" : « tirer un as et un seul ».
   Les événements A" et C" sont-ils indépendants ?

Exercice 14

On jette simultanément un dé bleu et un dé rouge.
Le dé bleu a des faces numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 5 ; 6
Le dé rouge a des faces numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
On appelle S la variable aléatoire qui à un lancer fait correspondre la somme des deux numéros tirés.
Donner la loi de probabilité de S.
Sachant que la somme S est égale à 7, quelle est la probabilité que le dé bleu ait donné le numéro 2 ?
Sachant que la somme S est égale à 7, quelle est la probabilité que le dé rouge ait donné le numéro 2 ?
Sachant que la somme S est égale à 7, quelle est la probabilité que l'un des dés ait donné le numéro 2 ?
Démontrer que les événements S = 7 et « le dé bleu a donné le numéro 2 » sont indépendants.

Exercice 15

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On jette successivement deux fois le dé et on note les numéros obtenus.
On appelle X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu.
On appelle Y la variable aléatoire définie par « la somme des deux numéros est un nombre premier ».
On appelle Z la variable aléatoire définie par « la somme des deux numéros augmentée de 4 est un nombre premier ».
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 16

On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de cœurs obtenus et Y la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si les deux cartes tirées sont consécutives ("As et roi" ou "roi et dame" ou ... ou "8 et 7") et qui prend la valeur 0 si les deux cartes ne sont pas consécutives.
Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?