RÉVISIONS	
Sujets de Bac	***Terminale S***

Antilles, septembre 2009

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

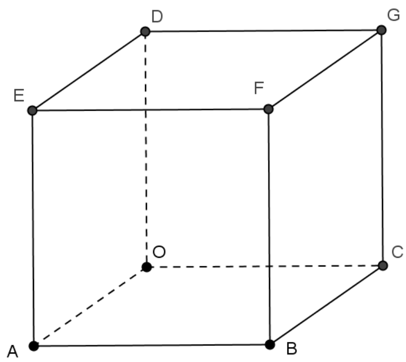
PARTIE B

1. Si A et B sont deux évènements indépendants avec $p(B) \neq 0$ et $p(B) \neq 1$, alors $p(A \cap B) = p_B(A)$.
2. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0 ; 1], alors $p(X \in [0,1 ; 0,6]) = 0,6$.
3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{3}$, alors

$$p(X > 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}.$$

Polynésie, septembre 2009

On considère le cube $OABCDEFG$ d'arête de longueur 1 représenté ci-contre.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient !es points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés (B, −1) et (F, 2).
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.



1. a. Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).
b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
c. Quelle est la nature du triangle PQR ?
2. a. Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.
b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).
a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).
b. Déterminer les coordonnées du point H.
c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).

Nouvelle-Calédonie, novembre 2009

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2e^{-x}$. On note f' la fonction dérivée de *f*.

1. a. Déterminer les limites de la fonction *f* en $-{+\infty}$ et $+\infty$.
b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de *f*.

c. En déduire le signe de *f* sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel *a*, on considère l'intégrale : $I(a)=\int_0^a f(x)\,dx$.

a. Donner selon les valeurs de *a* le signe de *I*(*a*).
b. À l' aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel *a* :

$$I(a)=2-2e^{-a}\left(1+a+\frac{1}{2}a^2\right).$$

c. En déduire pour tout nombre réel *a* : $\frac{1}{2}e^aI(a)=e^a-\left(1+a+\frac{1}{2}a^2\right)$.

3. Soient *g* et *h* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x$ et $h(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$.

On note C la courbe représentative de *g* et P celle de *h*.
a. Montrer que les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.
b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes C et P.

Amérique du Sud, novembre 2009

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :
$I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x}\,dx$.

1. a. Étudier les variations de la fonction $f:x\to f(x)=\frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle [0 ; 1].

b. Montrer que, pour tout réel *x* de l'intervalle [0 ; 1], on a $\frac{1}{e}\le f(x)\le\frac{1}{2}$.

2. Soit *J* et *K* les intégrales définies par $J=\int_0^1 2+x\,dx$ et $K=\int_0^1 x^2f(x)\,dx$.

a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J=3-\frac{4}{e}$.

b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3e}\le K\le\frac{1}{6}$.

c. Démontrer que *J* +*K* = 4*I*.
d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de *I*, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de *I*.

Antilles, septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
On considère les points $A(1\,;-1\,;4)$, $B(7\,;-1\,;-2)$ et $C(1\,;5\,;-2)$.
1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b. Montrer que le triangle *ABC* est équilatéral.
c. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (*ABC*).
d. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (*ABC*).
2. Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2\,,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -2t - 3 \end{cases}$.
a. Montrer que la droite (D) est perpendiculaire au plan (*ABC*).
b. Montrer que les coordonnées du point *G*, intersection de la droite (D) et du plan (*ABC*) sont $(3\,;1\,;0)$.
c. Montrer que *G* est l'isobarycentre des points *A*, *B* et *C*.
3. Soit (S) la sphère de centre *G* passant par *A*.
a. Donner une équation cartésienne de la sphère (S).
b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection *E* et *F*, de la droite (D) et de la sphère (S).

Antilles, septembre 2009

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.
1. Placer les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = -11 + 4i$, $z_B = -3 - 4i$ et $z_C = 5 + 4i$.
2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle *ABC*.
3. Soit *E* l'image du point *C* par la rotation R de centre *B* et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Montrer que l'affixe de *E* vérifie $z_E = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)i$. Placer le point *E*.
4. Soit *D* l'image du point *E* par l'homothétie h de centre *B* et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Montrer que *D* est le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*. Placer le point *D*.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit (Δ) la droite parallèle à la droite (*EC*) passant par le point D. On note *F* le point d'intersection de la droite (Δ) et de la droite (*BC*), *I* le milieu du segment [*EC*] et *J* le milieu du segment [*DF*].
Montrer que *B*, *I* et *J* sont alignés.

Antilles, septembre 2009

Soit *f* la fonction définie pour tout nombre réel *x* de l'intervalle]0 ; 1] par : $f(x)=1+x\ln x$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; 1].
C est la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
T est la droite d'équation *y* = *x*.
La courbe C et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur]0 ; 1], montrer que, pour tout nombre réel $x\in\left]0\,;1\right]$, on a $f(x)\leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x\in\left]0\,;1\right]$.

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note *g* la fonction définie pour tout nombre réel $x\in\left]0\,;1\right]$ par $g(x)=1+x\ln x-x$.

a. Étudier les variations de *g* sur l'intervalle]0 ; 1] et dresser le tableau de variation de *g*. On ne cherchera pas la limite de *g* en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T.

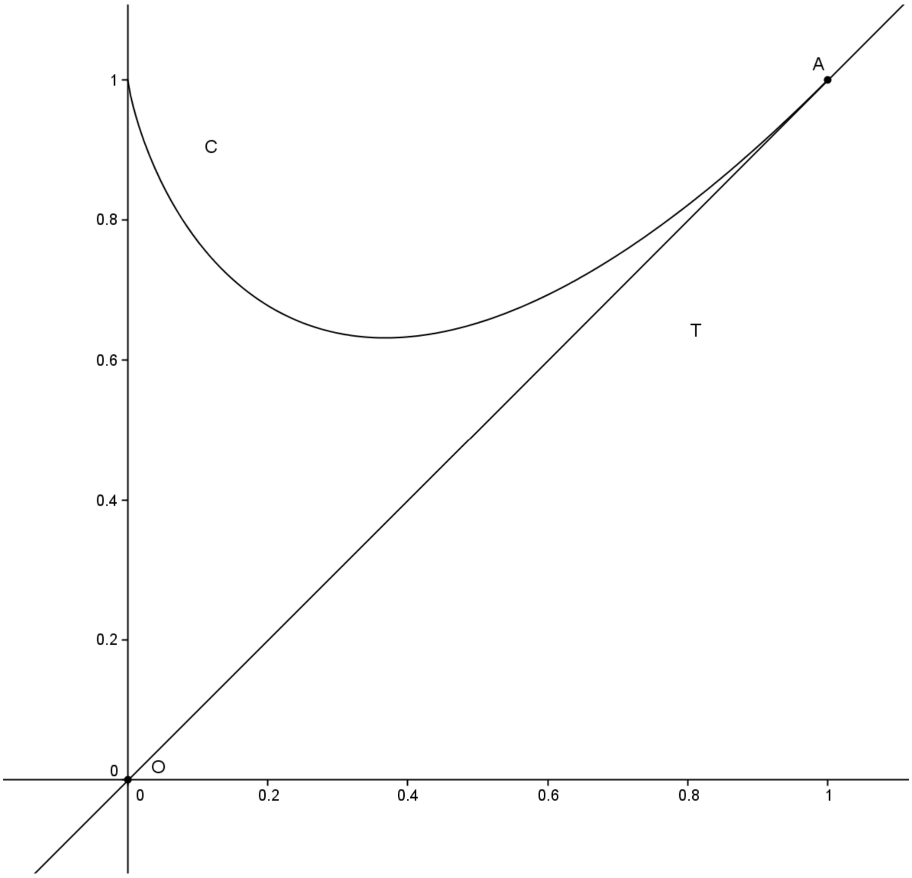
4. Soit α un nombre réel tel que $0<\alpha<1$. On pose $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}\left[1-f(x)\right]dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\alpha^2}{4}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe C, la droite T et l'axe des ordonnées.



Asie, juin 2009

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs F_1, F_2, F_3.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1, le tiers par le fournisseur F_2 et le reste par le fournisseur F_3.
Une étude statistique a montré que

- 5% des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise. On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_1 » ;
- F2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_2 » ;
- F3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.
b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.
c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?
2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires. On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, succesifs avec remise.
a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.
b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

Asie, juin 2009

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Question 1

La solution *f* de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x) = -2e^{-2x} + 3$.

Réponse (2) : $f(x) = -2e^{2x} + 3$.

Réponse (3) : $f(x) = -2e^{-2x} - 3$.

Question 2

On considère un triangle *ABC* et on note *I* le point tel que $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Les points *G*, *I* et *A* sont alignés lorsque *G* est le barycentre du système :

Réponse (1) : {(*A*, 1), (*C*, 2)}

Réponse (2) : {(*A*, 1), (*B*, 2), (*C*, 2)}

Réponse (3) : {(*A*, 1), (*B*, 2), (*C*, 1)}

Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne :
$x - 3y + 2z = 5$ et le point $A(2\,;\,3\,;\,-1)$. Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :
Réponse (1) : $H_1(3\,;\,-1\,;\,4)$ Réponse (2) : $H_2(4\,;\,-3\,;\,-4)$ Réponse (3) : $H_3(3\,;\,0\,;\,1)$

Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

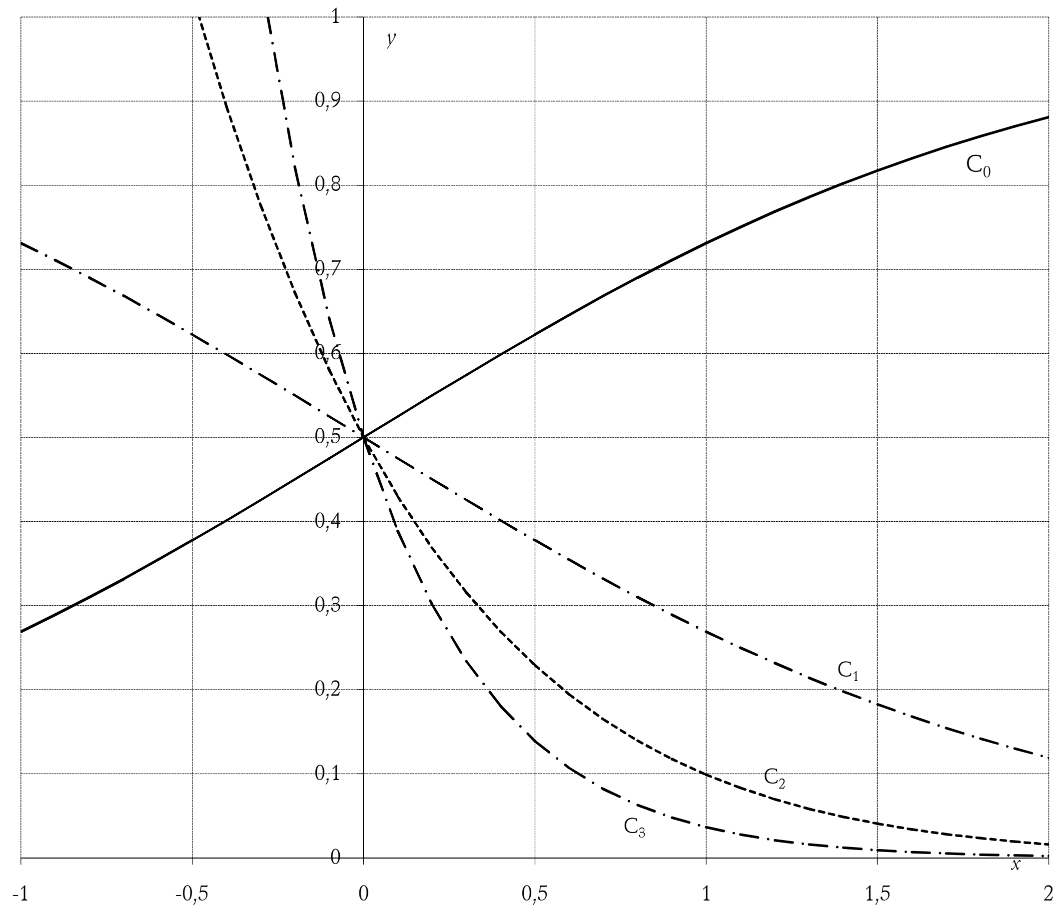
Réponse (1) : $-\dfrac{\pi}{2}$ Réponse (2) : $\dfrac{\pi}{4}$ Réponse (3) : $\dfrac{\pi}{2}$.

Centres étrangers, juin 2009

Soit n un entier naturel.

On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Les courbes C_0, C_1, C_2 et C_3 sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes C_n*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes C_n ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
a. Étudier le sens de variation de f_0.

b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction f_1
a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel *x.*
b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes C_0 et C_1.
4. Étude de la fonction f_n pour $n > 2$
a. Vérifier que pour tout entier naturel $n > 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

3. Calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Amérique du Nord, juin 2009

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.
Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours
Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à [0 ; 30], on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0)= 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur [0 ; 30] est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions : $\begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$.

2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.
Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin
Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Amérique du Nord, juin 2009

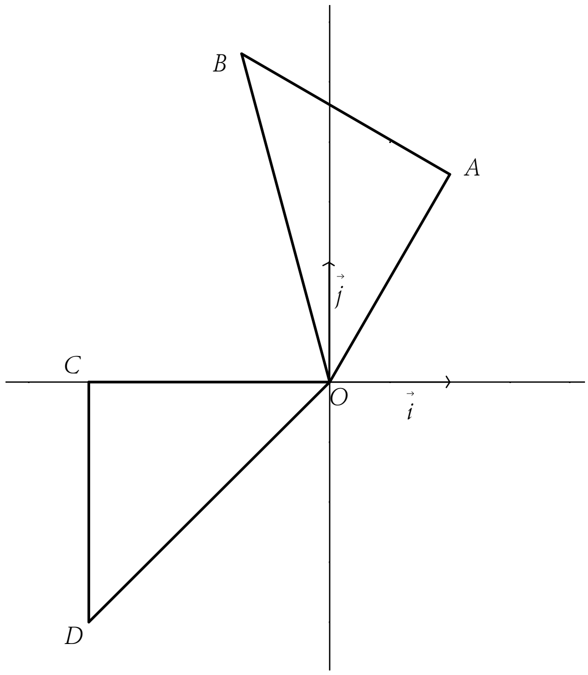
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct.

Soit *A* le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et *B* le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Partie A : étude d'un cas particulier

On considère la rotation *r* de centre *O* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

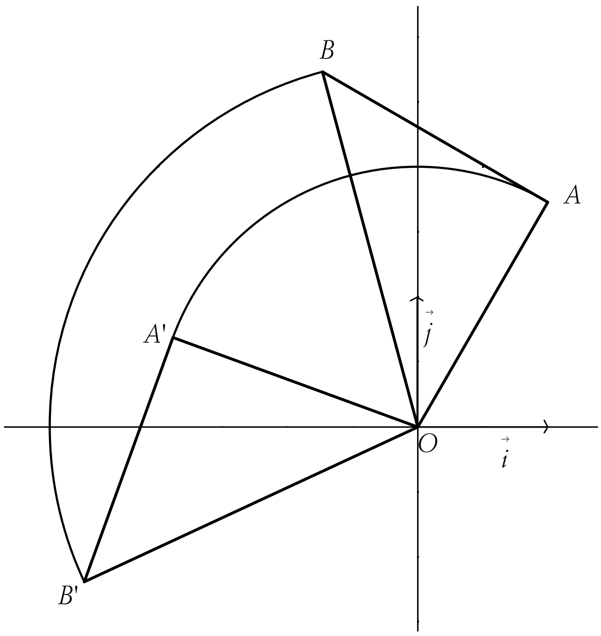
On note *C* le point d'affixe *c* image du point *A* par la rotation *r* et *D* le point d'affixe *d* image du point *B* par la rotation *r*.
La figure est donnée ci-contre.



1. a. Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.
b. En déduire que *OAB* est un triangle rectangle isocèle en *A*.
2. Démontrer que *c* = –2. On admet que *d* = –2–2*i*.
a. Montrer que la droite (*AC*) a pour équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.
b. Démontrer que le milieu du segment [*BD*] appartient à la droite (*AC*).

Partie B : étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;2\pi[$. On considère la rotation de centre *O* et d'angle θ.
On note *A*' le point d'affixe *a*', image du point *A* par la rotation *r*, et *B*' le point d'affixe *b*', image du point *B* par la rotation *r*.
La figure est donnée ci-contre.
L'objectif est de démontrer que la droite (*AA*') coupe le segment [*BB*'] en son milieu.



1. Exprimer *a*' en fonction de *a* et θ et *b*' en fonction de *b* et θ.
2. Soit *P* le point d'affixe *p* milieu de [*AA*'] et *Q* le point d'affixe *q* milieu de [*BB*'].
a. Exprimer *p* en fonction de *a* et θ puis *q* en fonction de *b* et θ.
b. Démontrer que $\frac{-p}{q-p} = \frac{-a}{b-a}$.
c. En déduire que la droite (*OP*) est perpendiculaire à la droite (*PQ*).
d. Démontrer que le point *Q* appartient à la droite (*AN*).