

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a > b$ .

Effectuons la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Soit  $r_1$  le reste de cette division.

Si  $r_1$  n'est pas nul, effectuons la division euclidienne de  $b$  par  $r_1$ , soit  $r_2$  le reste de cette division ; on a  $r_2 < r_1$ .

Si  $r_2$  n'est pas nul, on effectue la division euclidienne de  $r_1$  par  $r_2$ , et ainsi de suite.

Les restes successifs  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$  constituent une suite décroissante dont  $r_n$  est le plus petit reste non nul. La division de  $r_{n-1}$  par  $r_n$  est une division exacte.

Si  $A, B, R_1, R_2, \dots, R_n$  désignent les ensembles respectifs de diviseurs de  $a, b, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ , on peut présenter la suite des calculs et des raisonnements sous la forme suivante :

Divisions successives		Égalités d'ensembles
$a = bq_1 + r_1$	avec $r_1 < b$	$A \cap B = B \cap R_1$
$b = r_1q_2 + r_2$	avec $r_2 < r_1$	$B \cap R_1 = R_1 \cap R_2$
$r_1 = r_2q_3 + r_3$	avec $r_3 < r_2$	$R_1 \cap R_2 = R_2 \cap R_3$
$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$	avec $r_n < r_{n-1}$	$R_{n-2} \cap R_{n-1} = R_{n-1} \cap R_n$
$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$		$R_{n-1} \cap R_n = R_n$

De la suite d'égalités d'ensembles de la colonne de droite on déduit que  $A \cap B = R_n$ , c'est-à-dire que l'ensemble des diviseurs communs de  $a$  et de  $b$  est égal à l'ensemble des diviseurs de  $r_n$ .

La suite de calculs et de raisonnements présentée ci-dessus est appelée **algorithme d'Euclide**.

Le PGCD de deux entiers naturels  $a$  et  $b$  est l'entier naturel  $r_n$  de l'algorithme d'Euclide.