1) **Restitution organisée de connaissances.**

a) La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2}$ dérivables sur **R**, donc sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \mathrm{e}^x - x$.

Or, pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x > x$. On en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout réel x.

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

De plus, $g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$, on peut conclure que la fonction g est strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Par conséquent, **pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$**.

b) D'après la question précédente, on peut écrire que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$. Si x est un réel strictement positif, alors $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$.

2) a) Comme $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ pour tout réel x, et que $\dfrac{1}{4}x \geq 0$ pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$.

Par conséquent, **f est positive sur $[0\,;+\infty[$**.

b) $$f(x) = \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{4}x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et que $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, d'après la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}} = 0$. Par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

On en déduit que **la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$**.

c) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est dérivable sur **R** en tant que composée de la fonction $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$, dérivable sur **R**, et de la fonction exponentielle dérivable sur **R**.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{4}$, dérivable sur **R**.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur **R** en tant que produit de deux fonctions dérivables sur **R**.

On a : $f = u \times \mathrm{e}^v$ avec $u(x) = \dfrac{1}{4}x$ et $v(x) = -\dfrac{1}{2}x$.

Alors : $f' = u' \times \mathrm{e}^v + u \times v'\mathrm{e}^v$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{4}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

D'où : $f'(x)=\frac{1}{4}\times e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$, pour tout réel x strictement positif.

Comme $\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}>0$ pour tout réel x strictement positif, le signe de dépend de celui de $\left(1-\frac{x}{2}\right)$

Or $1-\frac{x}{2}=0 \iff x=2$, $1-\frac{x}{2}>0 \iff x<2$ et $1-\frac{x}{2}<0 \iff x>2$.

Par conséquent, **la fonction *f* est croissante sur $]-\infty\ ;2]$ et est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.**

On en déduit que :

x	0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$f(0)=\frac{1}{4}0\times e^{0}=0$ et $f(2)=\frac{2}{4}e^{-1}=\frac{1}{2e}$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction F est donc la primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui s'annule en 0.

Alors, pour tout réel x positif, $F'(x)=f(x)$. Or, d'après la question 2) a), f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, **la fonction *F* est croissante sur $[0\,;+\infty[$.**

b) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(\frac{1}{4}t\ e^{-\frac{t}{2}}\right)dt=\frac{1}{4}\int_0^x\left(t\ e^{-\frac{t}{2}}\right)dt$.

Posons $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=e^{-\frac{t}{2}}\end{cases}$. Alors $\begin{cases}u'(t)=1\\ v'(t)=-2e^{-\frac{t}{2}}\end{cases}$.

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont continues et dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, d'après la méthode de l'intégration par parties :

$$\int_0^x\left(t\ e^{-\frac{t}{2}}\right)dt=\left[-2t\ e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x-\int_0^x-2e^{-\frac{t}{2}}dt=\left[-2t\ e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x+2\left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x=-2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}+4.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{F(x)}=\frac{1}{4}\left(-2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}+4\right)\boldsymbol{=1-e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}}$.

c) D'après la question 2) b), $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{2}=-\infty$ et que $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$, d'après la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x}{2}}=0$. Par somme des limites des fonctions, on en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1}$.

D'après la question 3) a), on a le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $F'(x)$	0 $\qquad$ $+$
variations de F	0 $\nearrow$ 1

d) D'après la question précédente, la fonction F est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, que $F(0) < 0,5$ et $F(1) > 0,5$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $F(x) = 0,5$ admet une seule solution α dans $[0\,;+\infty[$.**

En utilisant la calculatrice, on obtient :

x	f(x)
0	0
1	0,09020401
2	0,26424112
3	0,4421746
4	0,59399415
5	0,7127025
6	0,80085173
7	0,86411177
8	0,90842181
9	0,93890052
10	0,95957232

pas =0,1

donc $3 < \alpha < 4$

x	f(x)
3	0,4421746
3,1	0,45876767
3,2	0,47506905
3,3	0,49106774
3,4	0,50675449
3,5	0,52212166
3,6	0,53716311
3,7	0,55187408
3,8	0,566251
3,9	0,58029149
4	0,59399415

pas = 0,1

donc $3,3 < \alpha < 3,4$

x	f(x)
3,3	0,49106774
3,31	0,49265059
3,32	0,49423031
3,33	0,4958069
3,34	0,49738033
3,35	0,49895062
3,36	0,50051774
3,37	0,5020817
3,38	0,50364248
3,39	0,50520008
3,4	0,50675449

pas = 0,01

donc $3,35 < \alpha < 3,36$

Par conséquent, **une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès est 3,36**.

4) Comme la fonction f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[0\ ;\ n]$ (n étant un entier naturel non nul), alors l'aire A_n en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, est égale à $A_n = \int_0^n f(t)\,dt = F(n)$.

Alors $A_n \geq 0,5$ équivaut à $F(n) \geq 0,5$, c'est-à-dire à $F(n) \geq F(\alpha)$.

Comme la fonction F est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, $A_n \geq 0,5$ équivaut à $n \geq \alpha$.

Par conséquent, **le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0,5$ est 4**.

C. Lainé