

D'une manière générale le barycentre de deux points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  est tel que  $\alpha\overline{AG} + \beta\overline{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$ . Comme on peut toujours diviser les coefficients par un même nombre, on peut choisir  $\alpha + \beta = 1$ , ce qui donne  $\overline{AG} = \beta\overline{AB}$ , soit la définition de la colinéarité de  $\overline{AG}$  et  $\overline{AB}$ . De  $\alpha + \beta = 1$  on tire  $\beta = 1 - \alpha$ , soit

$$\alpha\overline{AG} + (1 - \alpha)\overline{BG} = \vec{0}$$

où  $\alpha$  est un réel quelconque. Ceci caractérise alors  $G$  comme un point quelconque de la droite  $(AB)$  lorsque  $\alpha$  parcourt  $\mathbf{R}$ .

Particulièrement si  $0 \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \beta \leq 1$  on voit avec  $\overline{AG} = \beta\overline{AB}$  que  $G$  parcourt le segment  $[AB]$ ; si  $0 \leq \alpha \Leftrightarrow \beta \geq 1$ ,  $G$  parcourt la demi-droite « après »  $B$  et si  $\alpha \geq 1 \Leftrightarrow \beta \leq 0$ ,  $G$  parcourt la demi-droite « avant »  $A$ .

Dans un plan la situation est tout à fait semblable, mis à part qu'un plan est défini par trois points non alignés  $A, B, C$ ; on considère alors le barycentre  $G$  de  $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$  en prenant tout de suite  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . On a donc

$$\alpha\overline{AG} + \beta\overline{BG} + \gamma\overline{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow (1 - \beta - \gamma)\overline{AG} + \beta\overline{BG} + \gamma\overline{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AG} + \beta(\overline{BG} + \overline{GA}) + \gamma(\overline{CG} + \overline{GA}) = \vec{0}$$

soit  $\overline{AG} = \beta\overline{AB} + \gamma\overline{AC}$  avec  $\beta$  et  $\gamma$  parcourant  $\mathbf{R}$ .  $G$  parcourt alors le plan dans son ensemble.

Le même raisonnement que précédemment nous permet alors de dire que lorsque  $\beta$  et  $\gamma$  parcourent l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $G$  est à l'intérieur du triangle  $ABC$  (en fait dans ce cas les coordonnées de  $G$  dans le repère  $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$  sont précisément  $\beta$  et  $\gamma$ ). Les autres régions du plan pouvant être caractérisées de manière semblable.